

**Tema A1a Materiales:** *Mecánica de sólidos.*

## **"Relaciones Analíticas para la Predicción de la Deflexión en los Anillos de un Sello de Gas Seco"**

**Alfredo Chávez, Oscar De Santiago, Ma. Eugenia Quintanar.**

*CIATEQ AC., Av. Retablo No 150, Col. Constituyentes Fovissste, Querétaro, CP 76150, México.*

*ETU Turbo i+D, Cuauhtémoc 3, Industrial San Pedrito Peñuelas, Querétaro, CP 76148, México.*

*ITQ, Av. Tecnológico, Col. Centro, Querétaro, CP 76000, México.*

*\*Autor contacto. Dirección de correo electrónico: [alchavez@ciateq.mx](mailto:alchavez@ciateq.mx)*

---

### **RESUMEN**

El desempeño de los sellos de gas seco está influenciado por la deflexión de su anillo giratorio y estacionario, la cual puede ser del mismo orden de magnitud que el espesor de la película de fluido formada entre los anillos del sello. La predicción de la deflexión de los anillos en la fase de diseño es necesaria porque existen diferentes mecanismos que producen la distorsión de los mismos. El presente estudio se enfoca en obtener relaciones analíticas para predecir la deflexión de los anillos bajo condiciones de carga existentes en la operación del sello. Las expresiones analíticas derivadas en el presente trabajo arrojan resultados muy cercanos a los obtenidos por predicciones numéricas. Las deformaciones del anillo estacionario pueden afectar el desarrollo de la película lubricante en las caras de sellado.

### **ABSTRACT**

The performance of dry gas seals is influenced by the deflection of the rotary and stationary rings which may be the same order of magnitude as the thickness of the fluid film formed between the seal rings. Predicting ring deflection in the design process is important because there are different mechanisms producing ring distortion. The study presented in this article focuses on obtaining analytical relationships to predict deflection of the rings under ensuing load conditions in the operation of the seal. Derived analytical expressions render very close results to numerical predictions. Static ring deflections can affect the development of the lubricant film between the sealing faces.

**Tema A1a Materiales: Mecánica de sólidos.**

**"Relaciones Analíticas para la Predicción de la Deflexión en los Anillos de un Sello de Gas Seco"**

RESUMEN

El desempeño de los sellos de gas seco está influenciado por la deflexión de su anillo giratorio y estacionario, la cual puede ser del mismo orden de magnitud que el espesor de la película de fluido formada entre los anillos del sello. La predicción de la deflexión de los anillos en la fase de diseño es necesaria porque existen diferentes mecanismos que producen la distorsión de los mismos. El presente estudio se enfoca en obtener relaciones analíticas para predecir la deflexión de los anillos bajo condiciones de carga existentes en la operación del sello. Las expresiones analíticas derivadas en el presente trabajo arrojan resultados muy cercanos a los obtenidos por predicciones numéricas. Las deformaciones del anillo estacionario pueden afectar el desarrollo de la película lubricante en las caras de sellado.

*Palabras Clave: Sello de gas seco, Deflexión en anillos.*

ABSTRACT

The performance of dry gas seals is influenced by the deflection of the rotary and stationary rings which may be the same order of magnitude as the thickness of the fluid film formed between the seal rings. Predicting ring deflection in the design process is important because there are different mechanisms producing ring distortion. The study presented in this article focuses on obtaining analytical relationships to predict deflection of the rings under ensuing load conditions in the operation of the seal. Derived analytical expressions render very close results to numerical predictions. Static ring deflections can affect the development of the lubricant film between the sealing faces.

*Keywords: Dry gas seal, Ring deflection.*

**Nomenclature**

$\sigma_r$ Esfuerzo normal radial (Pa)	$h$ Espesor del anillo (m)
$\sigma_\theta$ Esfuerzo normal angular (Pa)	$(r, \theta, z)$ Vector de posición del elemento (m)
$\sigma_z$ Esfuerzo normal axial (Pa)	$\gamma$ y $\mu$ Constante de elasticidad de Lamé (Pa)
$\sigma_{rz}$ Esfuerzo cortante en plano $rz$ (Pa)	$\omega$ Velocidad angular (rad/s)
$E$ Módulo de elasticidad (Pa)	$P$ Presión aplicada al sello (Pa)
$\nu$ Relación de Poisson (--)	$P_o$ Presión manométrica del fluido de operación o proceso (Pa)
$T(r, z)$ Gradiente de temperatura (K/m)	$P_i$ Presión manométrica del medio ambiente (Pa)
$\alpha$ Coeficiente de expansión térmica (1/K)	$J_v(x)$ Primera función de Bessel (--)
$(u, v, w)$ Vector de desplazamiento del componente (m)	$Y_v(x)$ Segunda función de Bessel (--)
$a$ Radio interior del anillo (m)	$I_v(x)$ Primera función de Bessel modificada (--)
$b$ Radio exterior del anillo (m)	$K_v(x)$ Segunda función de Bessel modificada (--)

**1. Introducción**

Los sellos son componentes básicos en equipos rotodinámicos tales como turbinas, compresores y bombas, para evitar la fuga del fluido de proceso hacia el ambiente o el paso del fluido entre las cavidades internas del mismo equipo. Los sellos de gas seco son elementos mecánicos empleados para contener el fluido de proceso dentro de la carcasa del equipo y pueden ser empleados de forma

simple, en arreglos tándem o en arreglos doble-opuesto para asegurar que las fugas de los fluidos peligrosos no se produzcan.

El sello de gas seco está formado por la carcasa (que es utilizada para soportar los componentes internos del sello) y por un anillo estacionario y uno giratorio, que son los elementos principales utilizados para la contención del fluido. Para cumplir con su objetivo, los anillos estacionario y giratorio presentan una cara de trabajo mediante la cual se acoplan para evitar la fuga. Las caras

de trabajo deben presentar características geométricas para la adecuada operación del sello las cuales son: la rugosidad, la planicidad y ranuras con geometrías definidas. Sellos secundarios tales como o-rings o anillos de grafito son empleados para evitar la fuga de fluido entre los componentes del sello, como se observa en la Fig. 1. Resortes de compresión son empleados en el sello para controlar la posición o apertura entre las caras de trabajo del anillo giratorio y primario (estacionario). Una manga giratoria y una estacionaria se emplean para soportar los componentes del sello y acoplarlo con el equipo.

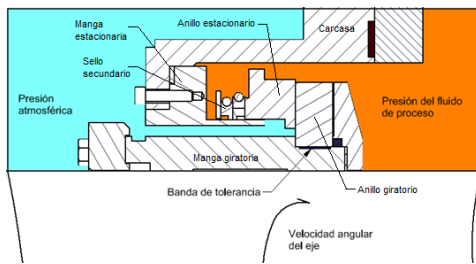


Figura 1. Esquema de sello de gas seco.

La operación del sello de gas seco se divide en dos estados: el primer estado se presenta cuando el movimiento relativo entre los anillos es cero, por lo que ambos anillos se encuentran acoplados y no permiten la fuga. El segundo estado ocurre cuando se presenta movimiento relativo entre los anillos. El segundo estado presenta tres fases en su operación. La primera fase aparece cuando inicia el movimiento relativo entre los anillos; el contacto entre los anillos es directo generando calor y produciendo desgaste de los mismos. En la segunda fase se inicia la formación de la película lubricante con contacto intermitente (régimen mixto de lubricación). La película de fluido se forma cuando el movimiento relativo de los anillos y las ranuras del anillo giratorio impulsan el fluido entre las ranuras hasta la represa del anillo giratorio, produciendo de esta manera una presión hidrodinámica que separa las caras de trabajo, y por consiguiente una película de fluido que reduce el calor generado.

La tercera fase es la condición normal de operación del sello de gas seco, cuando la película entre los anillos se encuentra desarrollada por completo y el calor generado por el contacto se elimina. El espesor de la película se encuentra en el orden de micrómetros, suficiente para eliminar el contacto entre los anillos y por tanto el desgaste. La dinámica del fluido en la película induce un gradiente de presión entre la presión de proceso u operación y la del medio ambiente evitando la fuga del fluido a través de la película.

Lebeck [1] observa que el desempeño del sello de gas seco es afectado por el desplazamiento o distorsión del anillo estático y giratorio (debido a que las magnitudes producto de la distorsión de la cara de trabajo del anillo pueden ser del mismo orden que el espesor de la película generada entre los anillos). La distorsión de los anillos es producida por la presión estática del fluido de proceso que actúa sobre

los anillos, así como por la presión hidrodinámica en la película formada entre las caras de los mismos. La distribución de temperatura en los anillos tiene un efecto considerable en el desempeño del sello de gas seco. Una fuente generadora de calor es la interrelación de la viscosidad del fluido de la película y el movimiento relativo de los anillos del sello durante su operación continua. Otra fuente de calor es el contacto que se produce en el sello durante el arranque o paro del equipo rotodinámico. Green [2] realiza un estudio por medio de simulación numérica para definir el comportamiento de un sello mecánico de no contacto durante el arranque y paro del equipo, y observa que el calor producido durante proceso transitorio de arranque del sello presenta un efecto hereditario que influye en el desempeño del mismo.

Glienck [3] estudia el comportamiento de un sello de no contacto por medio del método numérico de elementos finitos. En él acopla el campo de presión de la dinámica del fluido en la película y la deformación elástica resultante en los anillos ocasionada por la presión del fluido. Glienck [3] observa que la deflexión por presión en los anillos tiene una influencia considerable en el comportamiento del sello. Zhou [4] también emplea el método de elementos finitos y observa el comportamiento de un sello con ranuras en espiral considerando el campo de temperatura, producto de la dinámica del fluido y la deformación elástica de los anillos por el efecto de la temperatura.

Djama [5] obtiene el comportamiento de un sello con ranuras circulares empleando una simulación numérica y acoplando tanto el campo de temperatura como el de presión del fluido en la película para determinar el efecto que estos campos inducen en la deformación de los anillos del sello. Brunetiere [6,7] analiza el comportamiento termoelástico e hidrodinámico de los anillos del sello por medio de un estudio semianalítico, obteniendo dos parámetros adimensionales que asocian la deformación del anillo por temperatura. Estos parámetros adimensionales permiten el mejoramiento del diseño del sello.

Doust [8] predice la distorsión producida por la temperatura y presión en un sello mecánico (no de gas) utilizando el método de elemento a la frontera, correlacionando estos resultados con datos obtenidos de manera experimental.

La predicción de la deflexión de los anillos del sello en trabajos previos es obtenida a través de métodos numéricos. Este trabajo se enfoca en obtener relaciones analíticas para predecir la distribución de esfuerzos y las deformaciones que presentan los anillos del sello de gas seco al ser sometidos a cargas de superficie y cuerpo existentes en la operación normal del sello, así como la distorsión de los anillos cuando éstos presentan un gradiente de temperatura. La ventaja de contar con relaciones analíticas para la predicción de las deformaciones es que son fáciles de programar y ayudan considerablemente a reducir el tiempo de análisis y diseño del sello. Para la obtención de las relaciones analíticas se asume que el

sistema se comporta de forma lineal y que las propiedades de los materiales que conforman los anillos son isotrópicas e independientes de la presión y la temperatura.

## 2. Análisis de deformación de los anillos de sellado.

Las relaciones analíticas que definen el comportamiento de distorsión o deflexión de los anillos del sello se enfocan en las condiciones de carga que se producen en la tercera fase de la operación del sello de gas explicada anteriormente. El anillo estacionario y giratorio se encuentra sometido a la presión normal del fluido de proceso en la superficie del diámetro exterior y en la cara opuesta a la cara de trabajo de los anillos (no se considera el diámetro de balance en el anillo estacionario, Müller [9]). La superficie del diámetro interno del anillo se somete a la presión estática del medio ambiente que rodea el sello. El anillo giratorio se somete a la fuerza de cuerpo resultado de la velocidad angular del mismo. En las caras de trabajo de los anillos se produce una distribución de presión, resultado de la reducción de presión estática del fluido de proceso y la presión hidrodinámica de la película de fluido entre los anillos. La Fig. 2 (a)-(b) muestra el esquema del anillo giratorio y estacionario con las presiones inducidas.

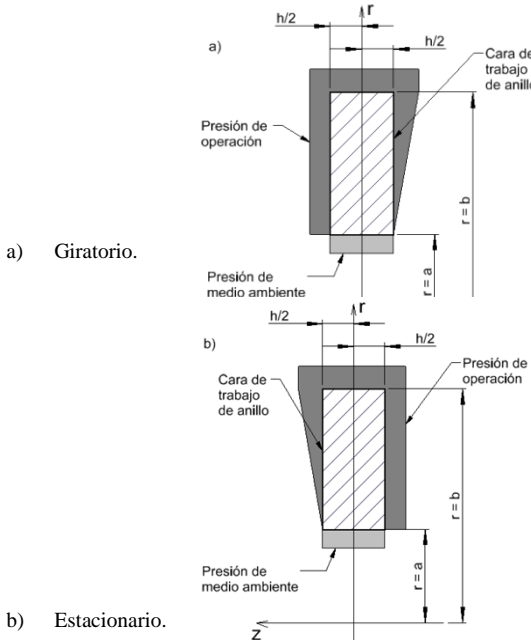


Figura 2. Distribución de presiones en (a) anillo giratorio, (b) anillo estacionario.

Los anillos estacionario y giratorio presentan un gradiente de temperatura en el cuerpo inducido por el calor generado por la dinámica del fluido en la película, así como el calor disipado por convección al fluido de proceso que rodea el anillo y el calor disipado por conducción a los elementos que tienen contacto con los anillos. El trabajo experimental de De Santiago, et al [10] muestra la distribución de temperatura en la cara de trabajo del anillo estacionario. El

gradiente de temperatura resultante en la cara tiene un comportamiento radial con un máximo en el diámetro exterior y decreciendo hacia el diámetro interior. Lebeck [1] también observa la existencia de un gradiente de temperatura axial en los anillos.

La distorsión o deflexión que presenta un anillo se obtiene por la combinación lineal de la distorsión que se produce por las cargas de superficie y de cuerpo en el anillo, así como la distorsión producida por el gradiente de temperatura en el mismo cuerpo. La deflexión total del anillo se obtiene al combinar la deflexión de los siguientes casos de carga que presenta el anillo:

- Deflexión del anillo por diferencia de presión entre el diámetro exterior e interior.
- Deflexión del anillo por aceleración normal (solo en anillo giratorio).
- Deflexión del anillo por distribución de presión en las caras axiales del anillo.
- Distorsión en el anillo por gradiente de temperatura radial.
- Distorsión en el anillo por gradiente de temperatura axial.

La derivación de las relaciones para cada caso de carga definido parte de la ley de Hooke (1), en la que se define la relación entre el esfuerzo normal, el cambio de temperatura y la deformación del cuerpo en la dirección correspondiente.

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T\end{aligned}\quad (1)$$

$$\epsilon_{r\theta} = (1 + \nu) \frac{\sigma_{r\theta}}{E}; \quad \epsilon_{\theta z} = (1 + \nu) \frac{\sigma_{\theta z}}{E}; \quad \epsilon_{rz} = (1 + \nu) \frac{\sigma_{rz}}{E}$$

El comportamiento de la deflexión del cuerpo y la deformación para un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje de coordenadas axial coincide con el eje axial del anillo, se relacionan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right); \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right); \\ \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (2)$$

El sistema de ecuaciones que define el comportamiento de los esfuerzos inducidos dentro del cuerpo del anillo es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} + \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + Z &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

El desplazamiento ( $u, v, w$ ) de un punto en el cuerpo producido por el cambio de temperatura, por las fuerzas externas y de cuerpo se obtiene al combinar las expresiones (1), (2) y (3). El sistema de ecuaciones que define el desplazamiento en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{aligned}
 (\gamma + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial r} - 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} \right) - (3\gamma + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial r} + R &= 0 \\
 (\gamma + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \phi} - 2\mu \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) - (3\gamma + 2\mu) \frac{\alpha}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \Phi &= 0 \\
 (\gamma + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \left( \frac{\partial(r\omega_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} \right) - (3\gamma + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} + Z &= 0 \\
 e = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} & \quad (4) \\
 \omega_z = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \\
 \omega_\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\
 \omega_r = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

En el estudio se asume que la geometría transversal del anillo giratorio y estacionario es una sección rectangular. Adicionalmente, las cargas aplicadas al anillo son constantes a lo largo del eje de coordenadas angular. Esto permite que el modelo tridimensional del anillo se pueda simplificar a modelos en dos dimensiones.

### 2.1. Deflexión del anillo por diferencia de presión en el diámetro exterior e interior.

La distribución de esfuerzos normales en el anillo para la diferencia de presión entre el diámetro exterior e interior es una relación existente en la literatura [11]. La presión aplicada es la diferencia entre la presión manométrica del fluido de proceso u operación y la presión manométrica del ambiente ( $P = P_o - P_i$ ). Ver la Fig. 3.

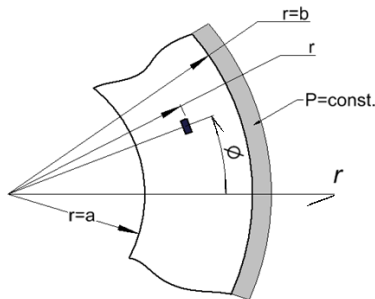


Figura 3. Condición de carga y dimensiones del anillo por diferencia de presión entre su cara externa y su cara interna.

$$\sigma_r = \frac{Pb^2(r^2 - a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (5)$$

$$\sigma_\phi = \frac{Pb^2(r^2 + a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (6)$$

La deflexión del anillo producto del diferencial de presión se obtiene al combinar las ecuaciones (5) y (6) con la ley de Hooke (1).

$$u_1 = \frac{P}{E} \left( \frac{b^2 a^2}{b^2 - a^2} \right) \left[ \frac{r(1 - \nu)}{a^2} + \frac{(1 + \nu)}{r} \right] \quad (7)$$

$$w_1 = - \frac{\nu(\sigma_r + \sigma_\phi)z}{E} \quad (8)$$

### 2.2. Deflexión del anillo por aceleración normal.

El comportamiento de los anillos por la fuerza de cuerpo es obtenido de la ecuación (4) bajo las condiciones y consideraciones siguientes:

- El esfuerzo normal radial en el diámetro exterior e interior es cero
- El desplazamiento radial con respecto a la posición angular es constante.
- El desplazamiento angular con respecto a la posición angular es constante.
- La deformación angular es nula como resultado de la simetría del cuerpo y de la carga aplicada.
- El esfuerzo cortante en el plano radial-angular es cero.
- La velocidad angular del anillo se representa como la fuerza de cuerpo dada por:  $R = r\rho\omega^2$

El esfuerzo normal en el anillo giratorio ocasionado por la velocidad angular es:

$$\sigma_r = \frac{EA}{8} \left( \frac{3 + \nu}{(1 - \nu^2)} \right) \left( r^2 - a^2 - b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \quad (9)$$

$$\sigma_\phi = \frac{EA}{8} \left( \frac{1}{(1 - \nu^2)} \right) \left( r^2(3\nu + 1) - (a^2 + b^2)(3 + \nu) - \frac{a^2 b^2(3 + \nu)}{r^2} \right) \quad (10)$$

$$A = \frac{\rho\omega^2}{(\gamma + 2\mu)} \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \text{ y } \mu = \frac{E}{2(1+v)} \quad (12)$$

Y la deflexión del anillo es:

$$u_2 = \frac{A}{8} \left( r^3 - \frac{r(a^2 + b^2)(3 + \nu)}{1 + \nu} - \frac{a^2 b^2(3 + \nu)}{r(\nu - 1)} \right) \quad (13)$$

$$w_2 = - \frac{\nu(\sigma_r + \sigma_\phi)z}{E} \quad (14)$$

### 2.3. Deflexión del anillo por distribución de presión en las caras axiales.

En el estudio de la deflexión producida por la presión axial se considera una presión con distribución triangular sobre la cara de trabajo del anillo y una condición de presión uniforme en la cara opuesta a la cara de trabajo. Se debe hacer notar que esta distribución es una simplificación de la distribución real de la presión. El modelo empleado para el análisis es del tipo asimétrico, cuyo eje coincide con el eje axial del anillo, según la Fig 4.

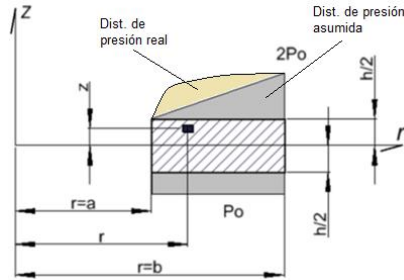


Figura 4. Condición de carga axial y dimensiones del anillo estacionario.

Supuestos para el análisis:

- La presión en la cara de trabajo de anillo es de forma triangular, con una magnitud de presión manométrica del medio ambiente en el diámetro interior y con valor máximo en el radio exterior.
- La presión manométrica del fluido de operación es uniforme en la cara opuesta a la cara de trabajo.
- El desplazamiento axial es nulo en los elementos del anillo localizados en  $z = 0$ .
- El esfuerzo cortante en el diámetro interior y exterior es cero.
- El desplazamiento radial con respecto a la posición axial es cero.
- El desplazamiento radial con respecto a la posición radial es cero.
- El esfuerzo normal axial en la cara de trabajo y opuesta es igual a la presión aplicada en la cara.

El anillo debe de cumplir con la condición de equilibrio entre las presiones aplicadas en las caras axiales del anillo.

$$P = \frac{2P_0(r-a)}{b-a} - P_i \quad (15)$$

La distribución de esfuerzos en el anillo producto de la presión axial es (ver Apéndice):

$$\sigma_{rz} = \frac{Ec_2c_4\Omega}{2(1+v)\sqrt{C}J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)} \left( \frac{(2r-b-a)\cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)}{(2r+b-3a)\sinh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)} \cosh(\Omega z) \right. \quad (16)$$

$$\left. + \sinh(\Omega z) \right) \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) - J_1\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{Ec_2c_4\Omega}{(1-v^2)J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)} \left( \frac{(2r-b-a)\cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)}{(2r+b-3a)\sinh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)} \sinh(\Omega z) \right. \quad (17)$$

$$\left. + \cosh(\Omega z) \right) \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) - J_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right]$$

$$\sigma_r = v\sigma_z \quad (18)$$

$$c_2c_4 \frac{P(1-v^2)(2r+b-a)J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)}{E\Omega\cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)(b-a)} \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) \right. \quad (19)$$

$$\left. - J_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right]^{-1}$$

$$C = \frac{(1-2v)}{2(1-v)} \quad (20)$$

La variable ( $\Omega$ ) que aparece en las ecuaciones se obtiene aplicando la primera y segunda función de Bessel  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$ , para  $\nu = 1$  y cumpliendo la igualdad siguiente:

$$J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega b}{\sqrt{C}}\right) - J_1\left(\frac{\Omega b}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) = 0 \quad (21)$$

La deflexión que se produce en el anillo por la presión axial es:

$$u_3 = \frac{r^2}{2(1-v)} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \quad (22)$$

$$w_3 = -\frac{c_2c_4}{J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)} \left( \frac{(2r-b-a)\cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)}{(2r+b-3a)\sinh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)} \cosh(\Omega z) \right. \quad (23)$$

$$\left. + \sinh(\Omega z) \right) \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) - J_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right]$$

#### 2.4. Distorsión en el anillo por gradiente de temperatura radial.

Los esfuerzos normales en el anillo bajo un gradiente de temperatura en el cuerpo radial es [12]:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{r^2} \left[ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r)r \, dr - \int_a^r T(r)r \, dr \right] \quad (24)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{r^2} \left[ \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r)r \, dr \right. \quad (25)$$

$$\left. + \int_a^r T(r)r \, dr - T(r)r^2 \right]$$

La distorsión del anillo por el gradiente de temperatura radial es:

$$u_4 \quad (26)$$

$$= \frac{\alpha}{r} \left( (1+v) \int_a^r T(r)r \, dr \right. \quad (27)$$

$$\left. + \frac{(1-v)r^2 + (1+v)a^2}{b^2 + a^2} \int_a^b T(r)r \, dr \right)$$

$$w_4 = \frac{1}{E} [-v(\sigma_r + \sigma_\theta)]z + \alpha T(r)z$$

#### 2.5. Distorsión en el anillo por gradiente de temperatura axial.

La distribución de esfuerzos y de desplazamiento en el anillo inducido por el gradiente de temperatura axial se



obtiene a partir de la ecuación (4) bajo las consideraciones y restricciones siguientes, Fig. 5.

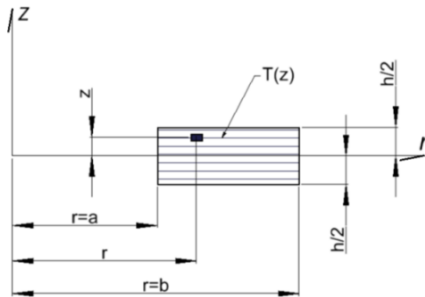


Figura 5. Gradiente axial de temperatura en el anillo.

Supuestos para el análisis:

- El desplazamiento axial con respecto a la posición radial es constante.
- El desplazamiento angular con respecto a la posición angular es constante.
- El desplazamiento angular con respecto a la posición radial es constante.
- El desplazamiento axial de los elementos del anillo en la cara opuesta de trabajo es nulo.
- El gradiente de temperatura en el anillo es función de su posición axial.
- El esfuerzo normal axial y radial en el anillo es nulo debido a que no existe una restricción física en el anillo que evite su expansión térmica.

El esfuerzo cortante producido por el gradiente de temperatura axial es:

$$\sigma_{rz} = \alpha(r - a) \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{dT(z)}{dz} \quad (28)$$

El desplazamiento del anillo se obtiene a partir de la siguiente relación

$$u_5 = \alpha \int_a^r T(r) dr = \alpha T(z)(r - a) \quad (29)$$

$$w_5 = \alpha \int_z^{h/2} T(z) dz \quad (30)$$

Por el supuesto de superposición lineal, la deflexión total que se produce en el anillo giratorio en la dirección radial es la suma de las deflexiones individuales. Es importante comentar que el anillo estacionario no presenta la condición de carga por velocidad angular, por lo que la deflexión total no debe incluir la deflexión por la fuerza de cuerpo.

$$u_T = \sum_{i=1}^5 u_i \quad (31)$$

De la misma manera la deflexión total del anillo giratorio en dirección axial es la suma de las deflexiones individuales. Se hace notar que la deflexión que influye en el comportamiento del sello de gas seco es la producida en

dirección axial debido a que es en esta dirección en la que se forma la película de gas hidrodinámica. La deflexión total en dirección axial no debe de considerar la deflexión por fuerza de cuerpo para el sello estacionario.

$$w_T = \sum_{i=1}^5 w_i \quad (32)$$

### 3. Evaluación del sello de gas seco con las relaciones analíticas.

La evaluación de la deflexión axial del anillo giratorio y estacionario se realiza para un sello de gas seco con 12 ranuras de espiral de 15° [10]. La Tabla 1 indica las características dimensionales que tienen los anillos, sus propiedades mecánicas y propiedades térmicas.

Tabla 1. Características de anillos, dimensiones, material y propiedades.

	Anillo giratorio	Anillo estacionario
Diámetro exterior de anillo (m)	0.122	0.122
Diámetro interior de anillo (m)	0.097	0.097
Espesor de anillo (m)	0.01	0.01
Material de anillo	Carburo de tungsteno	Grafito
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	14,950	2,230
Módulo de elasticidad (GPa)	640	18
Relación de Poisson	0.22	0.12
Coefficiente de expansión térmica (1/K)	5.2x10 <sup>-6</sup>	7.9x10 <sup>-6</sup>

La evaluación de la deflexión en el anillo giratorio y estacionario se realiza con los tres casos de carga indicados en la Tabla 2. Las magnitudes aplicadas en los tres casos de carga son valores tomados bajo un comportamiento de carga que se puede presentar en el sello de gas seco.

Tabla 2. Condiciones de carga empleadas para la evaluación.

Condición de carga	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Presión manométrica del fluido de operación (Pa)	101,325	607,950	1,013,250
Presión manométrica del ambiente (Pa)	0	0	0
Velocidad de giro (rpm)	2,000	7,000	15,000
Gradiente de temperatura radial (K)	$\frac{2(r-a)}{b-a}$	$\frac{6(r-a)}{b-a}$	$\frac{10(r-a)}{b-a}$
Gradiente de temperatura axial (K)	$\frac{(2z-h)}{h}$	$\frac{3(2z-h)}{h}$	$\frac{5(2z-h)}{h}$
Temperatura diámetro exterior (K)	301	304	308
Temperatura diámetro interior (K)	298	298	298

La solución de las ecuaciones para obtener la deflexión del anillo en el dominio que define el cuerpo del anillo se realiza en MATLAB, facilitando la obtención de las funciones de Bessel para la determinación del comportamiento de la deflexión del anillo por la presión en las caras axiales. En el intervalo de evaluación de la variable  $\Omega$  se obtienen 6 puntos donde se satisface la

relación (21), Fig. 6. Al incrementar el intervalo de evaluación de la variable se obtienen "n" puntos que satisfacen la relación debido a que la ecuación fluctúa alrededor de cero.

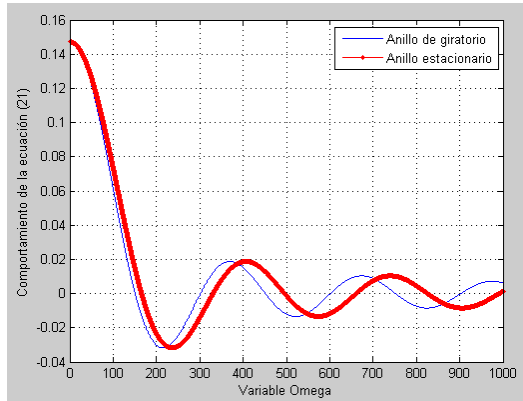


Figura 6. Comportamiento de la ecuación (21) vs la variable  $\Omega$ , para el anillo giratorio con relación de Poisson de 0.22 y para el anillo estacionario con relación de Poisson de 0.12.

La solución de las ecuaciones para obtener la deflexión por la presión axial en el anillo se realiza utilizando los 6 puntos que satisfacen la ecuación (21) para el anillo giratorio y estacionario. Las Tablas 3 y 4 muestran el comportamiento de la deflexión axial de los anillos del sello como función de la variable  $\Omega$  (giratorio y estacionario, respectivamente).

Tabla 3. Deflexión axial ( $w_3$ ) del anillo giratorio en el diámetro interior y exterior para presión en las caras axiales ( $\mu\text{m}$ ).

$\Omega$	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
150.87	-0.0759	0.0758	-0.4552	0.4550	-0.7586	0.7587
301.29	-0.0190	0.0190	-0.1142	0.1141	-0.1904	0.1901
451.81	-0.0085	0.0084	-0.0508	0.0507	-0.0847	0.0845
602.36	-0.0048	0.0047	-0.0287	0.0285	-0.0478	0.0475
752.91	-0.0031	0.0030	-0.0184	0.0182	-0.0306	0.0304
903.47	-0.0021	0.0021	-0.0128	0.0126	-0.0213	0.0211

Tabla 4. Deflexión axial ( $w_3$ ) del anillo estacionario en el diámetro interior y exterior para presión en las caras axiales ( $\mu\text{m}$ ).

$\Omega$	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
165.48	2.3225	-2.3215	13.935	-13.924	23.224	-23.206
330.46	0.5828	-0.5819	3.4969	-3.4911	5.8282	-5.8186
495.55	0.2595	-0.2586	1.5572	-1.5514	2.5954	-2.5857
660.67	0.1463	-0.1453	0.8778	-0.8720	1.4630	-1.4533
825.80	0.0939	-0.0929	0.5632	-0.5574	0.9387	-0.9291
990.94	0.0654	-0.0644	0.3923	-0.3865	0.6539	-0.6442

La deflexión que se produce en el anillo giratorio con cuatro diferentes condiciones de carga (excepto deformación por giro) y para el caso 2 de carga (ver Tabla 2) se muestra en la Fig. 7(a)-(d). Es importante recordar que la deflexión total del anillo es la combinación lineal de las deflexiones de cada condición de carga.

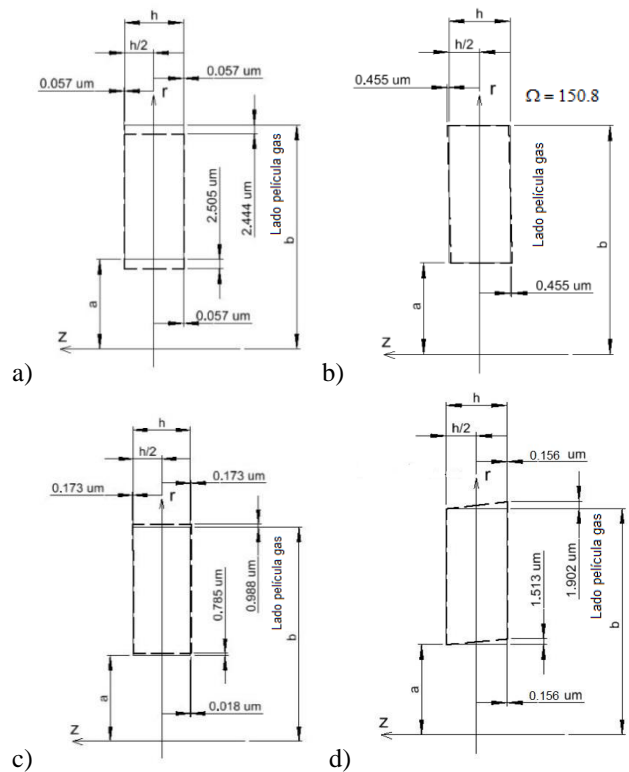


Figura 7. Deflexión del anillo giratorio ( $\mu\text{m}$ ) en el caso 2, (a) presión radial, (b) presión axial, (c) temperatura axial y (d) temperatura radial.

La deflexión que se produce en el anillo estacionario con las diferentes condiciones de carga y para el caso 2 de carga se muestra en la Fig. 8(a)-(d).

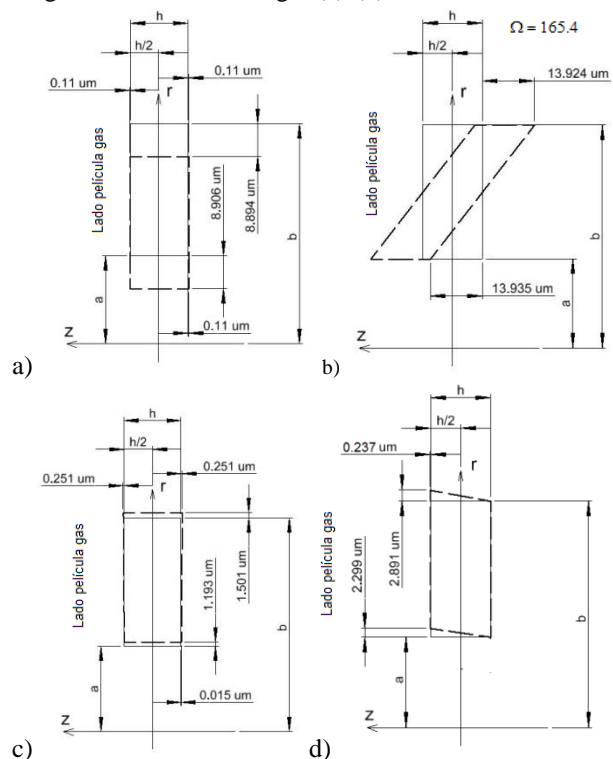


Figura 8. Deflexión del anillo estacionario ( $\mu\text{m}$ ) en el caso 2, (a) presión radial, (b) presión axial, (c) temperatura axial y (d) temperatura radial.



La Tabla 5 provee un resumen de la deflexión axial del anillo giratorio y estacionario para todas las condiciones de carga y los tres casos estudiados. Es importante notar que sólo se muestra la deflexión axial ( $w$ ) de los anillos debido a que esta flexión es la de interés para el diseño y evaluación del desempeño del sello de gas seco.

Tabla 5. Deflexión axial ( $\mu\text{m}$ ) del anillo giratorio y estacionario para todas las condiciones y casos de carga según la definición de la Tabla 2.

Deflexión axial del anillo giratorio	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
$w_1$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0009	-0.0009	-0.0057	-0.0057	-0.0095	-0.0095
$w_2$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0038	-0.0028	-0.0461	-0.0350	-0.2118	-0.1606
$w_3$ ( $\mu\text{m}$ )	Tabla 3	Tabla 3	Tabla 3	Tabla 3	Tabla 3	Tabla 3
$w_4$ ( $\mu\text{m}$ )	0.0059	-0.0575	0.0178	-0.1725	0.0297	-0.2875
$w_5$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0520	-0.0520	-0.1560	-0.1560	-0.2600	-0.2600
$w_T$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.1266	-0.0374	-0.6452	0.0858	-1.2102	0.0411

Deflexión axial del anillo estacionario	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
$w_1$ ( $\mu\text{m}$ )	0.0184	0.0184	0.1102	0.1102	0.1836	0.1836
$w_2$ ( $\mu\text{m}$ )	0	0	0	0	0	0
$w_3$ ( $\mu\text{m}$ )	Tabla 4	Tabla 4	Tabla 4	Tabla 4	Tabla 4	Tabla 4
$w_4$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0049	0.0835	-0.0147	0.2506	-0.0248	0.4178
$w_5$ ( $\mu\text{m}$ )	0.0790	0.0790	0.2370	0.2370	0.3950	0.3950
$w_T$ ( $\mu\text{m}$ )	2.4149	-2.1406	14.2673	-13.326	23.7778	-22.210

Por medio de análisis de elemento finito tipo estático estructural y térmico estable se determinó la deflexión del anillo estacionario y giratorio para los tres casos de carga presentados anteriormente y para las cinco solicitaciones mencionadas. El estudio es realizado en el software comercial Ansys versión 15.0. La Tabla 6 muestra los resultados de la deflexión axial de los anillos.

Tabla 6. Resumen de deflexiones axiales ( $\mu\text{m}$ ) en el anillo giratorio y estacionario para las diferentes condiciones y casos de carga definidos en la Tabla 2. Predicciones por el método de elementos finitos.

Deflexión axial del anillo giratorio	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
$w_1$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0009	-0.0009	-0.0057	-0.0057	-0.0095	-0.0095
$w_2$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0036	-0.0029	-0.0432	-0.0363	-0.1985	-0.1667
$w_3$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0750	0.0753	-0.4500	0.4520	-0.7500	0.7530
$w_4$ ( $\mu\text{m}$ )	0.0057	-0.0575	0.0172	-0.1724	0.0287	-0.2873
$w_5$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0593	-0.0593	-0.1778	-0.1778	-0.2963	-0.2963
$w_T$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.1330	-0.0453	-0.6595	0.0598	-1.2256	-0.0068

Deflexión axial del anillo estacionario	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
$w_1$ ( $\mu\text{m}$ )	0.0184	0.0184	0.1102	0.1102	0.1837	0.1837
$w_2$ ( $\mu\text{m}$ )	0	0	0	0	0	0
$w_3$ ( $\mu\text{m}$ )	2.5270	-2.5555	12.635	-12.777	25.270	-25.555
$w_4$ ( $\mu\text{m}$ )	-0.0046	0.0837	-0.0137	0.2510	-0.0228	0.4183
$w_5$ ( $\mu\text{m}$ )	0.0892	0.0892	0.2676	0.2676	0.4460	0.4460
$w_T$ ( $\mu\text{m}$ )	2.6300	-2.3643	12.999	-12.149	25.877	-24.507

La Tabla 7 presenta la variación de la deflexión axial que se obtiene de las relaciones analíticas determinadas y la calculada a través de elementos finitos. La deflexión axial

del anillo bajo la carga de presión axial tiene una variación hasta del 10% con respecto al valor obtenido por el método de elemento finito para la condición de la variable  $\Omega$  de 150.87 en el anillo giratorio y  $\Omega$  de 165.476 en el anillo estacionario. El error de esta misma condición se incrementa para los otros valores de  $\Omega$  obtenidos.

Tabla 7. Variación porcentual entre resultados de ecuaciones analíticas y simulación por método de elemento finito (Casos definidos en la Tabla 2).

Deflexión axial de anillo giratorio	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
$w_1$	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$w_2$	7%	4%	7%	4%	7%	4%
$w_3$	1%	1%	1%	1%	1%	1%
$w_4$	3%	0%	3%	0%	4%	0%
$w_5$	12%	12%	12%	12%	12%	12%

Deflexión axial de anillo estacionario	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior	Dia. Interior	Dia. Exterior
$w_1$	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$w_2$	--	--	--	--	--	--
$w_3$	8%	9%	10%	9%	8%	9%
$w_4$	8%	0%	8%	0%	9%	0%
$w_5$	11%	11%	11%	11%	11%	11%

La Tabla 7 muestra que el error que se presenta entre el resultado de la ecuación analítica y la predicción numérica para el caso de gradiente de temperatura axial ( $w_5$ ) es el más grande en comparación con el resto de las deformaciones, indicando que se requiere más trabajo para entender mejor esta condición de carga térmica.

La Fig. 9(a)-(b) muestra la deflexión total del anillo giratorio y estacionario para el segundo caso de carga.

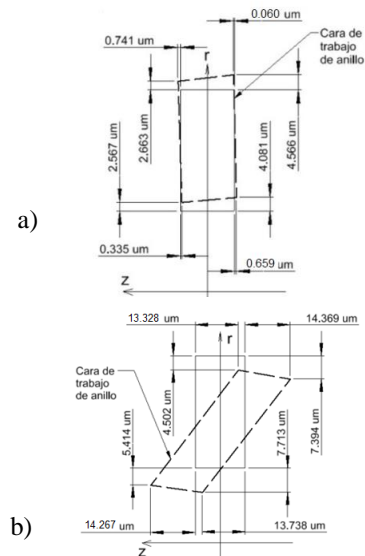


Figura 9(a) Deflexión total de los anillos del sello para el caso 2 de carga (ver Tabla 2) (a), anillo giratorio de carburo de tungsteno (b) anillo estacionario de grafito.

La deflexión axial del anillo estacionario es relativamente grande comparada con el espesor de película formada entre

los anillos del sello de gas seco, indicando la importancia de considerar esta deformación durante el diseño de los sellos. La diferencia grande de las deformaciones entre el anillo giratorio y estacionario se debe principalmente a la diferencia del módulo de elasticidad del material.

#### 4. Conclusiones.

Los resultados de las ecuaciones analíticas para obtener la deflexión o distorsión de los anillos tienen una buena aproximación con los resultados obtenidos por el método de elemento finito para la condición de presión diferencial entre el diámetro interior y exterior de los anillos estudiados, así como por aceleración normal y temperatura radial. Para el caso de carga donde la presión se aplica en las caras axiales del anillo, la aproximación de los resultados es satisfactoria, pero es importante comentar que la relación obtenida es para una condición de presión con un decremento lineal desde su diámetro exterior, y que para otro tipo de distribución de presión no satisface la ecuación obtenida.

La variación entre los resultados obtenidos de la ecuación analítica para la condición del gradiente de temperatura axial y los obtenidos a través de la simulación es considerable, pero se puede notar que el sistema presenta el comportamiento lineal ya que el error en los tres casos evaluados es el mismo. Se puede definir una constante "K" y obtener una aproximación satisfactoria en la predicción de la deflexión de los anillos a partir de la ecuación analítica.

La determinación de la deformación por la carga de presiones axiales requiere el uso de funciones de Bessel. En esta función, la relación a satisfacer para la obtención de la variable  $\Omega$  arroja un conjunto de soluciones para la deflexión del anillo por la presión. Para los casos de carga estudiados y la relación de Poisson, así como su geometría se observó que del conjunto de valores de solución, el valor de  $\Omega$  de mayor magnitud arroja una mejor correlación entre los resultados analíticos y numéricos.

#### 5. Referencias.

[1] Lebeck, A., *Principles and Design of Mechanical Face Seals*, A Wiley-Interscience publication, (1991).  
[2] Green, I., *A Transient Dynamic Analysis of Mechanical Seals Including Asperity Contact and Face Deformation*, Tribology Transactions, Vol. 45, Num. 3, (2002), pp. 284-293.  
[3] Glienicke, J., Launert, A., Schlums, H. and Kohring, B., *Non Contraction Gas Lubrication Face Seals High PV Values*, NASA collection Mechanical Engineering, (1994), pp 267-378  
[4] Jinfeng Z., Boqin, G. and Ye, C., *An Improve Design Spiral Groove Mechanical Seal*, Chinese J. Mechanical engineering, 15, (2007), pp. 499-506  
[5] Djamai, A., Brunetiere, N., and Tournerie, B., *Numerical Modeling of Thermoelastohydrodynamic*

*Mechanical Face Seal*, STLE Tribology, Vol. 53, (2010), pp. 414-425.

[6] Brunetiere, N., Thomas, S., and Tournerie, B., *The Parameters Influencing High Pressure Mechanical Gas Face Seal Behavior in Static Operation*, Tribology Transactions, 52, (2009), pp. 643-654

[7] Brunetiere, N., *An Analytical Approach of the Thermoelastohydrodynamic Behaviour Operating of Mixed Lubrication*, Institution of Mechanical Engineers, Journal Tribology, 224, (2010), pp. 1221-1233.

[8] Doust, T. G., and Parmar, A., *An Experimental and Theoretical Study of Pressure and Thermal Distortions in A Mechanical Seal*, ASLE Transactions, Vol. 29, Num. 2, (1986), pp. 151-159.

[9] Müller, H., Nau, B., *Fluid Sealing Technology Principles and Applications*, (1998), Marcel Dekker.

[10] De Santiago, O., Chávez, A., Garcia, J., y Sosa, B., *Measurements of Dynamic Pressure and Temperature in Dry Gas Seal Faces for Steam Turbines*, XIV Congreso y Exposición Latinoamericana de Turbomaquinaria, (2014).

[11] Shigley, J., and Mischke, C., *Diseño en Ingeniería Mecánica*, Quinta edición, (1989), Mc Graw Hill.

[12] Boley, B., and Weiner, J., *Theory of Thermal Stresses*, (1960), Dover Publications, Inc.

#### Apéndice

Deducción de las ecuaciones para el caso de carga de presión axial.

#### Deflexión de anillo por presión axial en las caras.

Partiendo de la ecuación (4) y aplicando las restricciones se obtienen las ecuaciones simplificadas:

$$(\gamma + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$(\gamma + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (2a)$$

Reacomodando las ecuaciones anteriores:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 2(1 - \nu) \frac{u}{r^2} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (4a)$$

$$C = \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \quad (5a)$$

La ecuación diferencial parcial (4a) se resuelve a través del método de separación de variables. Para ello la ecuación  $w = RZ$  es sustituida en (4a), donde  $R$  es una función dependiente de la posición radial y  $Z$  es una función dependiente de la posición axial.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = Z \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = R \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad (7a)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{C}{Rr} \left( \frac{dR}{dr} + r \frac{d^2 R}{dr^2} \right) = -\lambda \quad (8a)$$

Se presentan tres casos,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -\alpha^2$  y  $\lambda = \alpha^2$ , y al sustituir los tres casos en la ecuación (8a) y resolviendo las ecuaciones en función de  $Z$ .

$$Z = c_1 z + c_2 \quad (9a)$$

$$Z = c_1 \cosh(\Omega z) + c_2 \sinh(\Omega z) \quad (10a)$$

$$Z = c_1 \cos(\Omega z) + c_2 \sin(\Omega z) \quad (11a)$$

El comportamiento de la función  $R$  para el primer caso está dada por la siguiente relación (Ecuación de Cauchy-Euler).

$$R = c_3 + c_4 \ln(r) \quad (12a)$$

Para el segundo y tercer caso, la solución de las ecuaciones se obtiene a partir de la función de Bessel. El comportamiento de  $R$  para el segundo y tercer caso es:

$$R = c_3 J_0(x) + c_4 Y_0(x) \quad (13a)$$

$$R = c_3 I_0(x) + c_4 K_0(x) \quad (14a)$$

La primera y segunda función de Bessel  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$ , así como la primera y segunda función de Bessel modificadas  $I_\nu(x)$  y  $K_\nu(x)$  para  $\nu = 0$  y 1.

$$x = \frac{\Omega}{\sqrt{C}} r \quad (15a)$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (16a)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen}(\nu\pi)} \quad (17a)$$

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (18a)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x))}{2 \text{sen}(\nu\pi)} \quad (19a)$$

Al tomar las relaciones de Hooke (1), las relaciones de deformación (4) y al aplicar la función  $R$  y  $Z$  (ecuación 6a y 7a), se obtienen: el comportamiento del esfuerzo cortante, el esfuerzo normal axial y el esfuerzo normal radial en el anillo:

$$\sigma_{rz} = G \left( Z \frac{dR}{dr} \right) \quad (20a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (21a)$$

$$\sigma_z = \frac{ER}{(1-\nu^2)} \frac{dZ}{dz} \quad (22a)$$

$$\sigma_r = \nu \sigma_z \quad (23a)$$

La ecuación (12a) del primer caso que define el comportamiento de  $R$ , así como la ecuación (14a) para el tercer caso no satisfacen las condiciones de frontera, ni el comportamiento físico del sistema. Al aplicar el segundo caso (ecuación (13a)) y la relación de Hooke (1) se obtiene la solución del sistema. Para ello se tiene que cumplir con la condición siguiente ( $\Omega$  es la variable).

$$J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega b}{\sqrt{C}}\right) - J_1\left(\frac{\Omega b}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) = 0 \quad (24a)$$

Las constantes de integración obtenidas son:

$$c_2 c_4 \quad (25a)$$

$$= \frac{P(1-\nu^2)(2r+b-a) J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) - J_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right]^{-1}}{E \Omega \cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right) (b-a)}$$

$$c_3 = -c_4 \frac{Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)}{J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)} \quad (26a)$$

$$c_1 = c_2 \frac{(2r-b-a) \cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)}{(2r+b-3a) \sinh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)} \quad (27a)$$

El esfuerzo normal axial y cortante en el anillo se obtiene de la ecuación (20a) y (22a), al aplicar la solución de la ecuación diferencial parcial (10a) y (13a), así como las constantes de integración:

$$\sigma_{rz} = \frac{G c_2 c_4 \Omega}{\sqrt{C} J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)} \left( \frac{(2r-b-a) \cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)}{(2r+b-3a) \sinh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)} \cosh(\Omega z) \right. \quad (28a)$$

$$\left. + \sinh(\Omega z) \right) \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) - J_1\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right] \quad (29a)$$

$$\sigma_z = \frac{E c_2 c_4 \Omega}{(1-\nu^2) J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)} \left( \frac{(2r-b-a) \cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)}{(2r+b-3a) \sinh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)} \sinh(\Omega z) \right. \\ \left. + \cosh(\Omega z) \right) \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) - J_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right]$$

Finalmente, el desplazamiento axial del anillo producido por la presión es:

$$w = -\frac{c_2 c_4}{J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right)} \left( \frac{(2r-b-a) \cosh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)}{(2r+b-3a) \sinh\left(\frac{\Omega h}{2}\right)} \cosh(\Omega z) \right. \quad (30a) \\ \left. + \sinh(\Omega z) \right) \left[ J_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) Y_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) - J_0\left(\frac{\Omega r}{\sqrt{C}}\right) Y_1\left(\frac{\Omega a}{\sqrt{C}}\right) \right]$$