CIATEQ, A. C. Centro de Tecnología Avanzada Dirección de Posgrado



Geometría racional de engranajes cilíndricos rectos con resistencia a picadura de flancos activos

TESIS QUE PRESENTA

# MSc. Christoper Edgar Falcón Anaya Asesor: Dr. Gonzalo González Rey

Para obtener el grado de

## Doctor en Manufactura Avanzada

Aguascalientes, Aguascalientes agosto, 2021

## CARTA DE LIBERACIÓN DEL ASESOR



Miami, Florida, 06 de junio del 2021.

Mtro. Geovany González Carlos Coordinador Académico de Posgrado CIATEQ, A.C.

El abajo firmante, miembro del Comité Tutorial del MSc. Christoper Edgar Falcón Anaya, una vez revisado su Proyecto Terminal de tesis, titulado "Geometría Racional de Engranajes Cilíndricos Rectos con Resistencia a Picadura de Flancos Activos", autorizo que el citado trabajo sea presentado por el alumno para su revisión, con el fin de alcanzar el grado de Doctor en Manufactura Avanzada.

Sin otro particular por el momento, agradezco la atención prestada.

Dr. Gonzalo Gonzalez Rey Profesor Adjunto Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales Universidad Internacional de la Florida Email: <u>gogonzal@fiu.edu</u>

Department of Mechanical & Materials Engineering Florida International University Engineering Center 10555 West Flagler Street Miami, Florida 33174 Tel: 305-348-2569

## CARTA DE LIBERACIÓN DEL REVISOR



Saltillo, Coahuila, 14 de julio de 2021.

Miro. Geovany González Carlos Coordinación Académica CIATEQ, A.C.

Por medio de la presente me dirijo a usted en calidad de Revisor del proyecto terminal del (la) alumno (a) Christoper Edgar Falcón Anaya, cuyo título es:

#### GEOMETRÍA RACIONAL DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS RECTOS CON RESISTENCIA A PICADURA DE FLANCOS ACTIVOS

Después de haberlo leído, corregido e intercambiado información con el (la) alumno(a), y realizado los cambios que le fueron sugeridos, puede ser autorizada su impresión, a fin de que se inicien los trámites correspondientes para su defensa.

Sin otro particular por el momento, y en espera de que mis sugerencias sean tomadas en cuenta en beneficio del estudiante y la Institución, agradezco la atención prestada.

Atentamente,

Dr. José Antonio Betancourt Cantera

Clencia y Tecnologia No. 790, Col. Saltillo 400, CP. 25290, Saltillo, Coah., Móxico. Tel: +52 (844) 48 3200 www.comirma.com/mx



## CARTA DE LIBERACIÓN DEL REVISOR



Saltillo, Coahuila, 28 de julio de 2021.

Mfro. Geovany González Carlos Coordinación Académica CIATEQ, A.C.

Por medio de la presente me dirijo a usted en calidad de Revisor del proyecto terminal del (la) alumno (a) Christoper Edgar Falcón Anaya, cuyo título es:

#### GEOMETRÍA RACIONAL DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS RECTOS CON RESISTENCIA A PICADURA DE FLANCOS ACTIVOS

Después de haberlo leído, corregido e intercambiado información con el (la) alumno(a), y realizado los cambios que le fueron sugeridos, puede ser autorizada su impresión, a fin de que se inicien los trámites correspondientes para su defensa.

Sin otro particular por el momento, y en espera de que mis sugerencias sean tomadas en cuenta en beneficio del estudiante y la Institución, agradezco la atención prestada.

Atentamente,

Dra. Adriana Del Carmen Gallegos Melgar

Clencia y Tecnologia No. 790, Col. Saltillo 400, CP. 25290, Saltillo, Coah., México. Tet +52 (844) 411 3200 www.com/msa.com/mx



## DEDICATORIA

A papá **Dios** quien en todo momento esta y estuvo conmigo. Señor gracias por la resiliencia y la perseverancia.

#### Carmina.

Gracias por ser mi red, mi zona segura, pero sobre todo por ser mi cómplice esta meta y compañera de vida.

#### Kristoffer, Karmina.

Me porté bien, puse atención e hice amiguitos... Gracias hermososii

## AGRADECIMIENTOS

Papá Dios de nuevo, por siempre...Gracias.

**Gonzalo González**, gracias por acompañarme en este viaje de tantos años, por sus enseñanzas, ejemplos, pero sobre todo por su amistad, sin usted esto no sería posible.

"Tantos siglos, tantos mundos, tanto espacio y coincidir."

Victor Delgado, no sé cómo o de donde apareciste, pero gracias por todo.

Jorge Wellesley., Juan José J. Martínez, Pedrito Olvera.....gracias por todo el apoyo.

A CIATEQ y los profesores que fueron parte de esta formación, Dr. Fernando Martell, Mtro. Alejandro Vázquez, Mtra. Ana Claudia Morales, Mtro. Geovani González.

### RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es ofrecer un procedimiento para el cálculo de la geometría racional de un engranaje cilíndrico con dientes rectos que proporcione elevada resistencia a la picadura, tomando como base la norma AGMA 2101-D04 (American Gear Manufacturers Association;, 2016) y considerando un ambiente de operación, diseño y fabricación específicos. El procedimiento permitirá generar una síntesis geométrica racional del engranaje con menor esfuerzo de contacto en los flancos activos de los dientes conjugados. Son presentadas las relaciones que vincula la geometría del engranaje y su resistencia a esfuerzos de contacto utilizadas en el desarrollo de los modelos matemáticos que dieron soporte al procedimiento de cálculo. También, se muestra un diagrama de bloque para la ejecución del algoritmo base que permitió elaborar el procedimiento. Mediante un análisis por modelos de elementos finitos fue realizada una simulación del desempeño de los engranajes cilíndricos de dientes rectos bajo carga que permitió validar el procedimiento de cálculo y determinar las variables que más influyen en la transformación de esfuerzos con respecto a su geometría. Además, en el reporte de investigación es presentado un resumen del fallo por picadura y sus posibles causas.

Palabras clave: Engranaje cilíndrico; Resistencia a picadura; Síntesis geométrica; AGMA 2101.

### ABSTRACT

A procedure for calculating the rational geometry of a spur gears with higher resistance to pitting, based on AGMA Standard 2101-D04 (American Gear Manufacturers Association;, 2016) and considering design, manufacturing, and operation, is presented in this research report. This procedure is oriented to obtain a rational geometrical synthesis of the spur gears with less contact stress on the active flanks of matching teeth. The relationships among the spur gear geometry and its resistance to contact stresses used in the mathematical models that supported the calculation procedure are presented. Also, a block diagram is shown for the clarification of the base algorithm used in the calculation procedure. By means of a finite element model (FEM) analysis, a simulation of the performance of spur gears under load was performed. The FEM analysis allowed a validation of the variation of contact stresses. In addition, a summary of the pitting failure and its possible causes is presented in this research report.

Keywords: Spur gear; Pitting resistance; Geometric synthesis; AGMA 2101.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN
ABSTRACTvii
ÍNDICE DE CONTENIDO viii
ÍNDICE DE FIGURASxi
ÍNDICE DE TABLASxiv
GLOSARIOxvi
1. INTRODUCCIÓN
1.1. ANTECEDENTES
1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA5
1.3. JUSTIFICACIÓN
1.4. OBJETIVOS
1.4.1. Objetivo general
1.4.2. Objetivos específicos
1.5. HIPÓTESIS
1.6. TAREAS DE INVESTIGACIÓN7
1.7. MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN7
2. MARCO TEÓRICO
2.1. GEOMETRÍA BÁSICA DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS NECESARIA PARA EL CÁLCULO DE RESISTENCIA MECÁNICA A ESFUERZOS DE CONTACTO
2.2. PARÁMETROS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA DE LAS RUEDAS CILÍNDRICAS CON DIENTES RECTOS SEGÚN ISO Y AGMA
2.3. CORRESPONDENCIA EN EL GRADO DE PRECISIÓN DE LA MANUFACTURA DE LAS RUEDAS SEGÚN NORMAS ISO Y AGMA12
2.4. PERFIL DE REFERENCIA DE CREMALLERA BÁSICA

2.5. ECUACIONES PARA EL CÁLCULO GEOMÉTRICO DE LAS RUEDAS DENTADAS CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS
2.6. ECUACIONES PARA EL CÁLCULO GEOMÉTRICO DEL ENGRANE CILÍNDRICO DE DIENTES RECTOS CON EJES PARALELOS Y CONTACTO EXTERIOR
2.6.1. Coeficientes de corrección en los flancos de los dientes de evolvente de engranajes cilíndricos de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior
2.6.2. Relaciones matemáticas del perfil de los dientes de una rueda con dientes rectos
2.6.3. limitaciones (restricciones) en las soluciones geométricas de un engranaje cilíndrico con dientes rectos
2.6.4. Daños por picadura en el flanco de los dientes de engranajes cilíndricos asociados al esfuerzo de contacto
3. MODELO MATEMÁTICO 42
3.1. MODELO MATEMÁTICO CON INTERRELACIÓN DE LA GEOMETRÍA Y LA CAPACIDAD DE CARGA A ESFUERZOS DE CONTACTO
3.1.1. Esfuerzos de contacto en engranajes cilíndricos de dientes rectos con contacto exterior y ejes paralelos
3.1.2. Consideraciones en el desarrollo del modelo matemático 46
3.1.3. Modelo matemático con interrelación de la geometría y la capacidad de carga a esfuerzos de contacto
4. PROCEDIMIENTO Y RESULTADOS
4.1. SÍNTESIS GEOMÉTRICA DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS CON ELEVADA CAPACIDAD DE RESISTENCIA A LA PICADURA
4.1.1 Base del procedimiento para la síntesis racional de un engranaje cilíndrico con elevada resistencia a la picadura
4.1.2. Variables conocidas y desconocidas
4.1.3. Procedimiento de síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos con elevada capacidad de resistencia a la picadura

4.1.5. Resultados derivados de la aplicación del procedimiento de síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos
4.1.6. Soluciones para engranajes con coeficientes de corrección igual a cero 
4.1.7. Soluciones para engranajes con coeficientes de corrección diferentes a cero
4.2. VALIDACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE SÍNTESIS GEOMÉTRICA MEDIANTE COMPARACION DE RESULTADOS DERIVADOS DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
CONCLUSIONES
RECOMENDACIONES
APORTACIÓN DE LA TESIS
APORTACIÓN SOCIAL DE LA TESIS
REFERENCIAS

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Perfil de referencia de cremallera básica según ISO 53-98 13
Figura 2. Parámetros geométricos de rueda dentada cilíndrica de dientes rectos 17
Figura 3 Parámetros geométricos de un engranaje de ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos con contacto exterior y ejes paralelos
Figura 4. Límites recomendado y convencional para la suma de los coeficientes de corrección ( $\Sigma x = x1 + x2$ ) según ISO/TR 4467-1982. En la figura $\Sigma_{Zv}$ es la suma del número de dientes virtuales de las ruedas
Figura 5. Elaboración de ruedas dentadas mediante fresado, un típico método de copia
Figura 6. Elaboración de ruedas dentadas con tallado por fresa madre (método de generación)
Figura 7. Diferentes casos de tallado de ruedas en el procedimiento de generación. a) Rueda tallada sin corrección, b) Rueda tallada con corrección negativa, c) Rueda tallada con corrección positiva
Figura 8. Representación de las dimensiones y perfil de la cremallera de referencia de los dientes (perfil acabado)
Figura 9. Esquema del vínculo entre el borde superior de la herramienta y el corte del fondo del diente
Figura 10. Esquema base del trazado del perfil del diente con la variable "r" para la curva de evolvente y la variable $\phi$ en la curva de trocoide
Figura 11. Esquema de la ubicación de los puntos extremos de las curvas que componen el flanco activo del diente
Figura 12. Identificación de los parámetros geométricos involucrados en el cálculo de la interferencia en el plano que contiene la línea practica de engranaje 36
Figura 13. Movimiento del engranaje
Figura 14. Efectos de los sentidos de deslizamiento sobre la superficie del diente. 40
Figura 15. Picado destructivo
Figura 16. Fractura por picadura
Figura 17. Modelo de referencia para el cálculo de los esfuerzos de contacto en los flancos de los dientes de engranajes cilíndricos
Figura 18. Vista de línea de acción de un engranaje cilíndrico de dientes rectos. 44
Figura 19. Diferentes sectores del engranaje con 1 y 2 pares de dientes en contacto sobre la línea de engranaje ( $1 \le \epsilon \le 2$ )
Figura 20. Grafo de modelo matemático general

Figura 21. Comportamiento del esfuerzo de contacto límite para engrangies Figura 23. Factor por calidad de manufactura......64 Figura 24. Procedimiento de cálculo. Primera etapa del procedimiento de cálculo correspondiente a la generación de las variables básicas (modulo, cantidad de Figura 24. (continuación) - Procedimiento de cálculo. Segunda etapa del procedimiento de cálculo correspondiente al completamiento de la geometría de las ruedas y exclusiones de las geometrías inadmisibles según espesor del diente, Figura 24. (continuación) – Procedimiento de cálculo. Tercera y última etapa del procedimiento de cálculo correspondiente al cálculo del momento torsor aplicable en el piñón por resistencia a la picadura y retención de los valores óptimos que maximizan la función objetivo (engranaje con síntesis racional)...... 69 Figura 25. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia del módulo (m) y el radio de curvatura reducido ( $\rho$ ) para engranajes con geometría reportada en la tabla 11.....74 Figura 26. Variación del flanco de dientes en ruedas con diferentes números de Figura 27. Esquemas de ubicación del punto donde inicia la transmisión de carga un solo par de diente engranados (LPSTC) sobre la línea práctica de engranaje de ruedas con dientes rectos y distancia interaxial  $a_w = 315$  mm y razón de engranaje  $u_{12} = 2$ . A la izquierda, engranaje con módulo m = 1, piñón con 210 dientes y radio de curvatura de flancos en contacto  $\rho_1$  = 35.8 mm y  $\rho_2$  = 71.9 mm. A la derecha, engranaje con módulo m = 10, piñón con 21 dientes y radio de curvatura de los Figura 28. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (a<sub>w</sub>) y el radio de curvatura reducido ( $\rho_{red}$ ) de los flancos activos de los dientes en contacto para engranajes Figura 29. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (a<sub>w</sub>) y el radio de curvatura reducido ( $p_{red}$ ) de los flancos activos de los dientes en contacto para engranajes

Figura 36. Gráfica típica de esfuerzo-deformación para materiales dúctiles...... 89

Figura 41. Relaciones para el análisis de contacto......96

Figura 44. Esfuerzos de contacto para 41 dientes en piñón, modulo 5......99

Figura 46. Esfuerzos de contacto para 26 dientes en piñón, modulo 8..... 100

Figura 47. Esfuerzos de contacto para 21 dientes en piñón, modulo 10...... 100 Figura 48. Esfuerzos de contacto para 17 dientes en piñón, modulo 12...... 101

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Símbolos en normas AGMA e ISO para engranajes cilíndricos de dientes rectos
Tabla 2. Comparación del grado de precisión entre normas ISO y AGMA12
Tabla 3. Valores de perfiles de referencia de cremalleras básicas
Tabla 4. Valores normalizados de paso diametral (Pd) y módulos (m) normalizados más cercanos
Tabla 5. Simbología y unidades de variables participantes en el modelo matemático general
Tabla 6. Modelo matemático general de engranaje cilíndrico de acero con dientes rectos de ejes paralelos y contacto exterior con interrelación del esfuerzo de contacto, geometría involucrada y condiciones de operación y fabricación de las ruedas
Tabla 7. Coeficientes auxiliares del factor KHma según calidad del engranaje 52
Tabla 8. Variables conocidas (datos) para solución del problema de la síntesis geométrica de engranajes cilíndricos de acero con dientes rectos
Tabla 9. Variables desconocidas para solución del problema de síntesis geométrica de engranajes cilíndricos de acero con dientes rectos
Tabla 10. Recomendación del factor de sobrecarga Ko según ISO 6336-1
Tabla 11. Calidad del Engranaje
Tabla 12. Soluciones de máxima capacidad de carga para engranajes cilíndricos de acero de dientes rectos en casos de engranaje sin corrección del perfil en los flancos de evolvente, coincidentes con $x_{\Sigma} = 0$ , $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$
Tabla 13. Soluciones de máxima capacidad de carga para engranajes cilíndricos de dientes rectos de acero normalizado con dureza de 140 HB, con distancia interaxial de 315 mm, ancho de 126 mm y razón de engranaje de 2. Elaborados sin corrección del perfil en los flancos de evolvente ( $x_{\Sigma} = 0, x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ ) y generados con fresa madre según <i>ISO 54-77</i>
Tabla 14. Soluciones de máxima resistencia a picadura para engranajes cilíndricos de acero de dientes rectos con corrección del perfil en los flancos de evolvente, coincidentes con $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 \neq 0$
Tabla 15. Motivos que limitaron el valor máximo del momento torsor en el piñón. 81
Tabla 16. Soluciones racionales para un engranaje con corrección con distancia interaxial de 315 mm, ancho de 126 mm y razón de engranaje de 2
Tabla 17. Comparación del torque máximo en piñón para engranajes normales (x <sub>1</sub> = $x_2 = 0$ ) y engranajes con corrección (x <sub>1</sub> $\neq 0$ )

Tabla 18. Valores de los engranajes a modelar para el análisis FEA. Distancia entre
ejes a <sub>w</sub> = 315 mm, ancho de engranaje b <sub>w</sub> = 126 mm; razón de engranaje $u_{12}$ = 2,
ángulo de hélice en los dientes $\beta$ = 0°;; factor de altura de la cabeza de cuchilla
ha* =1; factor de holgura radial c*= 0.25; factor de radio de fondo del diente $\rho_f^*$ =
0.25
Tabla 19. Tabla de resultados de esfuerzos máximos de contacto 101
Tabla 20. Solución de síntesis geométrica racional obtenida con FEA 102

### GLOSARIO

AGMA: American Gear Manufacturers Association.

**Aguzado:** Hacer o sacar punta a algo, o un extremo adelgazar en forma de punta. En el presente trabajo se refiere a la disminución del espesor de cresta de los dientes por efecto de la corrección positiva.

**Cremallera:** Barra metálica con dientes en uno de sus cantos, para engranar con un piñón y convertir un movimiento circular en rectilíneo o viceversa. En el presente trabajo, se refiere a una cremallera de referencia que durante la generación de los dientes de las ruedas conjugan perfectamente con ellas.

**Engranaje:** Engranaje es una rueda o cilindro dentado empleado para transmitir un movimiento giratorio o alternativo desde una parte de una máquina a otra.

**Esfuerzos de contacto:** Los esfuerzos de contacto ocurren en elementos de máquinas cuando se transmiten cargas a través de superficies que presentan contactos puntuales o a lo largo de una línea.

**Espacio interdental:** Es cualquier espacio que hay entre diente y diente, medidos entre flancos de dientes contiguos en una rueda dentada.

**Fatiga superficial:** Se caracteriza por las grietas generadas por las tensiones cíclicas de contacto. Creando hendiduras paralelas o perpendiculares en el área de contacto según las direcciones de la tensión principal.

Flanco de diente: Es la cara interior del diente medida en su ancho, es su zona de rozamiento con el diente conjugado.

**Holgura:** Este término se refiere el espacio o dimensión suficiente para que pase, quepa o que se puede mover dentro de algo. En el presente trabajo, se refiere al espacio entre cresta de diente y fondo de diente en un par de dientes conjugados de dos ruedas engranadas. **Interrelación:** Refiere a una correspondencia recíproca que existe entre individuos, objetos u otros elementos. En este trabajo se refiere a la relación existente entre las variables conocidas y variables en el cálculo de engranajes.

**ISO:** International Organization for Standardization.

**Síntesis geométrica:** Geometría optima o racional para mejorar una función de operación o característica del producto. En el presente trabajo, se entenderá una efectiva reducción del volumen geométrico de un engranaje con una garantía de alta resistencia al deterioro por picadura de los flancos de los dientes.

**Transmisiones mecánicas:** Es el mecanismo encargado de enviar o trasmitir potencia y velocidad de un motor a alguna otra parte, con el objetivo de mover un mecanismo o dispositivo mecánico.

# 1. INTRODUCCIÓN

Una de las principales causas de deterioro de las transmisiones por engranajes que trabajan en abundancia de lubricante, es la picadura de flancos activos y debido a esto las principales normas para evaluar la capacidad de carga (American Gear Manufacturers Association;, 2003) (American Gear Manufacturers Association;, 2016) (International Organization for Standardization;, 2008) y diseñar engranajes (American Gear Manufacturers Association;, 2016) consideran en primera instancia la necesaria resistencia al deterioro por picadura de los dientes en las ruedas de las transmisiones por engranajes.

Es conocido, que el deterioro por picadura de ruedas dentadas es inevitable y ocurre por el contacto intermitente de los flancos activos de los dientes durante el engrane (González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005). La picadura a largo plazo puede causar grietas de fatiga superficial que generan el desprendimiento de fragmentos de material en los flancos activo de los dientes que alteran el perfil del diente y, en dependencia de la velocidad de trabajo, aumentan las cargas dinámicas en el contacto entre dientes. En la etapa final, el proceso de picadura superficial se intensifica provocando un deterioro progresivo y un debilitamiento del diente que puede ser la causa raíz de una evidencia de fractura en el diente.

En la actualidad, el procedimiento aceptado para evaluar la resistencia a la picadura de los dientes en los engranajes cilíndricos está basado en determinar el esfuerzo de contacto entre los flancos de los dientes conjugados en el engranaje y compararlo con esfuerzos de contacto admisible por picadura. Estos esfuerzos toman como referencia, para formular las ecuaciones de resistencia de materiales, el modelo formado por dos cilindros en contacto oprimidos con una fuerza igual a la fuerza normal ( $F_N$ ) entre los dientes conjugados y conocido como el modelo de Hertz (Pedrero, Artés, Pleguezuelos, García Masiá, & Fuentes, 1999).

1

En el año 2016, fue reafirmada y aprobada una nueva edición de la norma ANSI-AGMA 2101-D04 (American Gear Manufacturers Association;, 2016) que reformuló las relaciones para evaluar el esfuerzo de contacto haciendo uso del sistema métrico e incorporó modificaciones en el factor de distribución de carga en el flanco de los dientes K<sub>H</sub> y el factor por carga dinámica K<sub>V</sub>. Este estado del conocimiento ha permitido sentar las bases para el desarrollo de un procedimiento de cálculo del esfuerzo nominal de contacto en los dientes de los engranajes cilíndricos con base en la norma AGMA 2101-D04 (American Gear Manufacturers Association;, 2016), considerando las condiciones de operación, diseño y fabricación y así poder establecer la síntesis geométrica racional de un engranaje más resistente a la picadura de los flancos activos de los dientes.

#### **1.1. ANTECEDENTES**

A través de la historia los engranes de ruedas dentadas han sido utilizados para la transmisión de movimiento. En la actualidad, el desarrollo de las transmisiones por engranajes continúa siendo de gran importancia para el crecimiento de la industria mecánica de cualquier país, así como en cualquier ramo de la misma. Esto explica la sostenida comercialización y el constante aumento de la producción de los engranajes en el mercado internacional. Una referencia de este desarrollo lo muestra un estudio realizado por Market Watch (Research, Verified Market, 2021), que informó valores por ventas de engranajes de los 127.81 mil millones de US\$ en el año 2018 y estimó un crecimiento anual en el quinquenio de 5.9% hasta alcanzar en el año 2026, ventas anuales alrededor de los 200.1 mil millones de US\$. En general, los resultados derivados de estudios sobre la actualidad del tema de los engranajes en la esfera internacional muestran el interés creciente en esta rama de la ingeniería mecánica, y las importantes inversiones y trabajos realizados para el continuo mejoramiento de estas transmisiones.

En la actualidad, la industria en México mantiene un desarrollo creciente, especialmente en el estado de Aguascalientes donde están localizadas las plantas de autos Nissan más grandes de Latinoamérica, lo que requiere de una gran producción de diferentes tipos de elementos de máquina, y en particular de la aplicación de ruedas de engranes.

La situación antes mencionada puede presentar una derrama económica muy cuantiosa en el país ya que los encargados de la fabricación de los elementos de máquinas son las medianas empresas y/o talleres que se encuentran en la ciudad de Aguascalientes y sus alrededores lo que les genera ganancias importantes, pero ¿por qué no promover mejoras con un diseño racional de los componentes? La mejora en los diseños puede implicar que las medianas empresas y talleres fabricantes de ruedas dentadas en México puedan impulsar una industria alternativa de piezas de recambio con diseño y tecnología autóctonas capaz de competir con los elevados precios de las piezas originales de repuesto.

Las sugerencias de mejoras en la industria en México, pero especialmente en Aguascalientes, son muy pocas debido al escaso interés que muestran las compañías extranjeras radicadas en el país de introducir modificaciones o innovaciones que no procedan originalmente de la casa matriz de la compañía productora aun y cuando los costos son muy altos por la importación, esto debido a que las pocas modificaciones e innovaciones que se introducen son realizadas con un mínimo de investigación aplicada y generalmente no son soportadas con un fundamento teórico, lo que hace que esta situación se convierta en un área de oportunidad para iniciar diseños de elementos de máquinas con estudios e investigaciones en base a las ciencias técnicas y con rigor científico permitiendo la reproducibilidad de los resultados con una aplicación generalizada. La particularidad del diseño óptimo de un engranaje cilíndrico está condicionada, en primer lugar, a que el cálculo de un engranaje es en extremo complejo debido al número de variables, limitaciones y relaciones que involucra, y por otro lado existe el hecho de que para cada caso de optimización la función objetivo, las restricciones y las variables independientes son generalmente diferentes. Por ejemplo, se conocen de investigaciones dirigidas a minimizar la temperatura del contacto entre dientes debido al deslizamiento entre flancos conjugados (Wink & Mantri, 2013), el costo y el ruido (González Rey G., Higher contact ratios for quieter gears, 2009), equiresistencia de las ruedas (Qiang, Yuehai, & Lun, 2018), la introducción de un perfil mejorado para aumentar resistencia a la fractura (Gopichand, Sharma, Kumar, Sainath, & Aravind, 2012), y minimizar la distancia entre centros en engranajes con dentado interior (Verma R.G., 2012), pero en todos los casos, la aplicación del procedimiento ha requerido un estudio de la geometría del engranaje, una organización del procedimiento de evaluación de la función objetivo y una definición de las restricciones durante la generación de las variantes o alternativas.

Los engranajes con ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos son más sencillos que otros tipos de engranajes, en relación a su diseño, construcción y explotación, resultando ellos ideales para la producción en pequeñas series de piezas de repuesto para la maquinaria e industria en general. Además, la industria mecánica mexicana cuenta con capacidades tecnológicas suficientes como para enfrentar su producción y garantizar diseños económicos, fiables y duraderos para estos engranajes. En este sentido, un procedimiento para diseñar engranajes con elevada capacidad de carga específica (carga por volumen), sería una excelente manera de potenciar nuevos diseños racionales de engranajes y obtener proyectos con altas posibilidades de competitividad en concordancia con los medios tecnológicos disponibles y procesos de fabricación factibles de aplicar en las condiciones de México, específicamente en el estado de Aguascalientes ya que aun y cuando existen diferentes investigaciones para la optimización de estos elementos, solo son sugerencias que se orientan en base a diferentes recomendaciones de como optimizar el engrane.

Por otra parte, la introducción de la norma AGMA 2101-D04:2016 demuestra que la industria mundial del engranaje se está orientando a la utilización de sistema métrico y brinda una oportunidad única de iniciar la migración de los diseñadores y fabricantes de engranajes mexicanos al sistema métrico internacional.

### 1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

A pesar de ser conocidas las bases teóricas del deterioro por picadura de los flancos activos de los engranajes cilíndricos en baños de aceite, no existe un procedimiento para la síntesis racional de engranajes cilíndricos de ejes paralelos y dientes rectos con gran capacidad de resistencia a la picadura. De esta forma puede ser enunciado el siguiente problema de investigación:

 ¿Cómo obtener una síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos de manera que permita el diseño de ruedas dentadas con máxima capacidad de resistencia a la picadura de los flancos, con restricción de volumen y condiciones tecnológicas establecidas?

### 1.3. JUSTIFICACIÓN

Será obtenido un procedimiento para la síntesis racional de engranajes cilíndricos de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior bajo condiciones de restricciones de volumen, tomando como base la norma AGMA 2101-D04/2016 que permita a los diseñadores y fabricantes de engranajes tener una herramienta para el cálculo de perfiles de dientes con máxima resistencia a los esfuerzos de picadura y restricción de volumen ya que hasta el momento y según nuestros estudios sobre el tema, no existe un procedimiento semejante.

#### 1.4. OBJETIVOS

#### 1.4.1. Objetivo general

Elaborar en base a la Norma ANSI/AGMA 2101-D04/2016 un procedimiento de cálculo para desarrollar la síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior, que permita el diseño de ruedas dentadas con máxima capacidad de resistencia a la picadura de los flancos activos, con restricción de volumen y condiciones tecnológicas establecidas.

#### 1.4.2. Objetivos específicos

Determinar los parámetros a considerar en el desarrollo de un procedimiento general que permita la síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos que posibilite el diseño de ruedas dentadas con máxima capacidad de resistencia a la picadura de los flancos activos, con restricción de volumen y condiciones tecnológicas establecidas.

Validar el procedimiento establecido mediante la comparación de los resultados obtenidos con los derivados del estudio de un prototipo virtual para esfuerzos definidos con MEF en el programa Solidworks.

### 1.5. HIPÓTESIS

La norma ANSI/AGMA 2101-D04/2016, permite el desarrollo de un procedimiento de cálculo para la síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos y contacto exterior con máxima capacidad de resistencia a esfuerzos de contacto y por consiguiente a la picadura de los flancos activos, con una restricción de volumen y condiciones tecnológicas establecidas.

### **1.6. TAREAS DE INVESTIGACIÓN**

- 1. Análisis bibliográfico del tema de investigación.
- Diagnóstico acerca del estado del arte actual en el área de investigación e innovación basado en la Norma ANSI/AGMA 2101-D04/2016 para la síntesis de engranajes cilíndricos de dientes rectos.
- Determinar las acciones necesarias para resolver el problema de la síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos en base al procedimiento desarrollado.
- 5. Elaborar el reporte final de la investigación.

### 1.7. MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

- Análisis y síntesis: Se utilizó para identificar los parámetros de la geometría con mayor influencia en la capacidad de carga del engranaje cilíndrico, tomando en consideración las relaciones presentes en la norma ANSI/AGMA 2101-D04/2016, de manera que estos parámetros de la geometría puedan ser considerados como variables de entrada en el procedimiento y ejecutar una simulación del comportamiento de la resistencia del engranaje.
- Método sistémico: Se empleó para entender y solucionar el problema a partir del objeto de estudio con base a la norma ANSI/AGMA 2101-D04/2016 y el factor de picadura J.
- Inducción-deducción: Se utilizó para obtener la relación existente entre las variables que integran el problema de síntesis del engranaje y orientar las funciones objetivos del proceso de optimización de la capacidad de carga del engranaje a esfuerzos de contacto.
- Modelación: Fue empleado para el desarrollo de un modelo que permitirá validar el procedimiento establecido mediante la comparación de los resultados obtenidos con los derivados del estudio de un prototipo virtual para esfuerzos definidos con MEF en el programa Solidworks.

# 2. MARCO TEÓRICO

# 2.1. GEOMETRÍA BÁSICA DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS NECESARIA PARA EL CÁLCULO DE RESISTENCIA MECÁNICA A ESFUERZOS DE CONTACTO

En el presente capitulo serán dadas las principales relaciones para calcular los parámetros geométricos básicos requeridos en la evaluación de la resistencia mecánica de un engranaje cilíndrico de dientes rectos de contacto exterior y ejes paralelos. Adicionalmente, será establecida la verificación de la calidad geométrica del engranaje mediante importantes indicadores que establecen restricciones racionales en el campo de las soluciones posibles.

## 2.2. PARÁMETROS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA DE LAS RUEDAS CILÍNDRICAS CON DIENTES RECTOS SEGÚN ISO Y AGMA

Es innegable el destacado aporte realizado, en el desarrollo de normas y orientaciones para el cálculo los engranajes de la Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes (AGMA) y la Organización Internacional para la Normalización (ISO).

En la actualidad, debido a la aceptación internacional de la nomenclatura ISO en el tema de engranajes, y tomando en cuenta que AGMA trabaja arduamente en la dirección del Comité Técnico ISO TC60, las normas AGMA están aceptando la nomenclatura ISO en sus documentos, incluida la norma AGMA 2101-D04 (American Gear Manufacturers Association;, 2016) tomada como base para el actual trabajo de investigación. Por lo que, en un futuro inmediato, la denominación ISO para engranajes será predominante en el continente americano. En la actualidad, la nomenclatura ISO para engranajes es aceptada en la mayoría de los países de Europa, Asia y Oceanía. Por tal motivo, la nomenclatura ISO fue empleada como referencia en el presente trabajo.

Las normas AGMA optaron en sus inicios por el paso diametral (*pitch*) para normalizar las cremalleras básicas y las normas ISO por el módulo. Estos hechos han traído como resultado una diferencia en la valoración analítica de los engranajes según sea el patrón de referencia; módulo o paso diametral. Adicionalmente, el desarrollo en paralelo, pero con bases no coincidentes, ha producido diferencias entre las normas AGMA en sistema *pitch* y las normas ISO, que requieren una clara definición para no cometer errores.

Un claro ejemplo es la relación inversa entre el módulo (m) y el paso diametral  $(P_d)$ .

$$m = \frac{25,4}{P_d}$$
 (Ec. 1.1)

Siendo:

Módulo: 
$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{z}$$
 (mm)

Paso diametral:  $P_d = \frac{z}{d} = \frac{\pi}{d}$  (pulg-1)

Donde:

- p = Paso circunferencial en el diámetro de referencia (*mm* en sistema ISO o *pulg*-1 en sistema AGMA).
- z = Cantidad de dientes en la rueda o piñón.
- d = Diámetro de referencia (mm en sistema ISO o pulg<sup>-1</sup> en sistema AGMA).

Nótese que las unidades del módulo (*m*) y el paso diametral (*Pd*), atendiendo a los sistemas de unidades empleados, son el milímetro (mm) y la pulgada (pulg<sup>-1</sup>), pero la práctica del uso ha hecho que las unidades se omitan y se hable de un "módulo

5 ó *pitch* 5", sin mencionar sus unidades. Para facilitar la compresión de aquella literatura asociada con la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos que emplea nomenclatura ISO y AGMA se muestra la Tabla 1.

Tabla 1.	Símbolos	en norma	S AGMA	e ISO	para	engranajes	cilíndricos	de	dientes
rectos									

Símbolos		Descripción					
AGMA	ISO						
Ν	Z	Número de dientes					
MG	U	Razón o relación de engrane					
-	m	Módulo normal a					
Pd	-	Paso diametral <sup>b</sup>					
С	а	Distancia interaxial normal (Standard)					
Cr	aw	Distancia interaxial de operación					
F	b	Ancho del diente					
$\phi$	α	Ángulo del perfil de la cremallera de referencia.					
<i>ф</i> t	αt	Ángulo del perfil de la cremallera de referencia en plano transversal					
-	XΣ	Corrección sumaria <sup>c</sup>					
D	d	Diámetro de referencia (paso)					
Do	da	Diámetro de cresta					
Dr	df	Diámetro de fondo					
Db	db	Diámetro básico					
-	dw	Diámetro primitivo <sup>d</sup>					
а	ha	Altura de la cabeza del diente					
b	h <sub>f</sub>	Altura del pie del diente					
С	С	Holgura radial					
-	С*	Factor de holgura radial					
-	h <sub>a</sub> *	Factor de altura de cabeza					
ht	h	Altura del diente					
-	х	Coeficiente de corrección del diente					
pc	р	Paso circular en cilindro de referencia					
рь	рь	Paso básico normal					
S	S	Espesor normal del diente en el cilindro de referencia					
φn	аw	Ángulo de engranaje en dientes rectos					
mp	3	Coeficiente de recubrimiento					
р	1	Referido al piñón					
g	2	Referido a la rueda					

Elaboración propia

Notas:

a-Es la base del sistema métrico (ISO);

b- Es la base del sistema AGMA.;

## 2.3. CORRESPONDENCIA EN EL GRADO DE PRECISIÓN DE LA MANUFACTURA DE LAS RUEDAS SEGÚN NORMAS ISO Y AGMA

Otra relación inversa puede ser observada en el número seleccionado para definir el grado de precisión en la elaboración, en las normas ISO números menores de grado de precisión indican engranajes con mayor suavidad de marcha, precisión cinemática y mejor huella de contacto en los flancos, entre otros aspectos, en el caso de las normas AGMA los mayores números se reservan para los engranajes de mayor calidad. Aunque no existe una relación exacta, tomando en cuenta que no son coincidentes todos los parámetros de valoración y los rangos de tolerancias, la siguiente fórmula permite una indicación sobre la correspondencia entre el grado de precisión ISO(QISO) y AGMA (QAGMA).

$$Q_{AGMA} + Q_{ISO} \approx 17$$
 (Ec. 1.2)

La Tabla 2 proporciona una referencia cruzada general entre los estándares AGMA e ISO para el grado de precisión. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no hay una conversión directa y completa entre estos estándares. La tabla de referencias cruzadas a continuación indica la "similitud" de los grados de precisión Q en cada estándar.

Tabla 2. Comparación	del arado de	precisión entre	normas ISO y AGMA
			,

AGMA	13	12	11	10	9	8
ISO	4	5	6	7	8	9

Elaboración propia

### 2.4. PERFIL DE REFERENCIA DE CREMALLERA BÁSICA

Para conservar la constancia de la relación de transmisión cinemática en el engranaje los dientes del piñón y la rueda deben tener los perfiles conjugados, es decir que: La normal común a los perfiles en contacto dividirá a la distancia entre centros en dos segmentos inversamente proporcional a las velocidades angulares de las ruedas (González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005). Esta condición de contacto de los dientes entre el piñón y la rueda se observa si ellos engranan correctamente con la cremallera de referencia.

Los parámetros del perfil de la cremallera de referencia pueden ser determinados de aquellos perfiles básicos más difundidos y normados. Una de las formas más difundidas de altura y ángulo de flanco de los dientes del perfil de referencia en las cremalleras básicas corresponde a:  $\alpha = 20^{\circ}$ , ha\* = 1 y c\* = 0,25 según la norma internacional ISO 53-98 (ver Figura 1). Esta referencia corresponde con la norma japonesa JIS B 1701-72, la norma polaca PN-78/m-88503 y la norma soviética GOST 13755-68, entre otras.



Figura 1. Perfil de referencia de cremallera básica según ISO 53-98 Elaboración propia

En la Figura 1 se identifica: (1) perfil (rayado) de la cremallera básica, (2) línea de módulo y corresponde con recta donde el espacio interdental ( $e_p$ ) es igual al espesor del diente ( $s_p$ ), (3) recta de cresta, (4) recta de fondo y (5) perfil del diente

de la cremallera básica conjugada. Es usual adoptar perfiles iguales para la herramienta y el engranaje, es decir:  $\alpha = \alpha_p$ ,  $c = c_P$ ,  $h_\alpha = h_{FfP} = h_{\alpha P}$ ,  $\rho_f = \rho_{fP}$ . (González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005).

La norma estadounidense AGMA 1003-G93 (American Gear Manufacturers Association, 1999) acepta una cremallera básica de igual referencia, pero con la siguiente pequeña modificación en el factor de holgura radial:

$$c^* = 0.2 + \frac{0.05}{m}$$
 (Ec. 1.3)

Otras formas de perfil de referencia para cremalleras básicas están en la Tabla 3.

α	h <sub>a</sub> *	C*	ρ <sup>*</sup>	Norma que acepta			
20,0°	1,00	0,25	0,250	ISO 53-98 (para ruedas de aplicación general y			
				aceptada por fabricantes de herramientas)			
20,0°	1,00	0,25	0,300	ISO 53-98, AGMA 1003-H07 (para ruedas de			
				aplicación general)			
20,0°	1,00	0,25	0,38	ISO 53-98, JIS B 1701-72, (perfil de mayor aceptación			
				para ruedas de gran capacidad de carga)			
20,0°	1,00	0,4	0,39	ISO 53-98 (aplicable en ocasiones para engranajes			
				rectificados)			
20,0°	1,20	0,50	0,300	Industria automovilística			
22,5°	1,00	0,25	0,400	Industria automovilística			
25,0°	1,00	0,25	0,318	AGMA 1003-H07			
14,5°	1,00	0,157	0,470	AGMA 1003-H07			

Tabla 3. Valores de	e perfiles de	referencia de	cremalleras básicas
---------------------	---------------	---------------	---------------------

Elaboración propia

 $\rho_F^*$ : factor del radio de curvatura en la zona de transición del pie diente ( $\rho_F$  / m).

Según ISO 53-98, el máximo valor del factor de radio de curvatura en el fondo del perfil del diente es limitado generalmente por el valor de holgura radial aceptado y puede ser calculado según las siguientes relaciones:

Para 
$$\alpha = 20^{\circ}, c^{*} \le 0.295 \text{ y} \quad ha^{*} = 1$$
  

$$\rho_{fmax}^{*} = \frac{c}{1 - sen \alpha} \quad (Ec. 1.4)$$
Para  $\alpha = 20^{\circ}, 0.295 < c^{*} \le 0.396 \quad \rho_{fmax}^{*} = \frac{\left[\frac{\pi}{4} - \left(ha^{*} + c^{*}\right) \cdot tan \alpha\right]}{tan\left[\frac{(90^{\circ} - \alpha)}{2}\right]} \quad (Ec. 1.5)$ 

\*

Es importante reconocer que las dimensiones del perfil básico de la cremallera de referencia se establecen como múltiplo del módulo m y son identificadas por un asterisco (\*), por consiguiente, su valor real se obtiene multiplicando el factor por el módulo. Por ejemplo, para una cremallera de referencia con ha\* = 1, c\* = 0,25 y  $\rho$ f\* = 0,3 los valores absolutos y reales correspondientes a una rueda de módulo 5 son ha = 5mm, c = 1,25mm y  $\rho$ f\* = 1,5mm.

Actualmente en varias de las normas relativas a engranajes, editadas y aceptadas por diferentes países, existe una marcada coincidencia en los valores de módulo recomendados en la primera serie de preferencia. Con más frecuencia son empleados los módulos recomendados en la norma internacional ISO 54-77: 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40 y 50 mm. Una segunda serie de preferencia en ISO 54-77 acepta los módulos 1.125, 1.375, 1.75, 2.25, 2.75, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 36 y 45mm. La Tabla 4 muestra valores normalizado del paso diametral (Pd) y los módulos normalizados (m) más cercanos.

.Pd (Grueso)	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4	5	6	8	10	12	16
AGMA 1102-C19													
m	25	20	16	12	10	8	6	5	4	3	2.5	2	1.5
ISO 54-77													
Pd (Fino)	20	24	32	40	48	64	72	80	96	120			
AGMA 1003-H07													
m	1.25	1											
ISO 54-77													

Tabla 4. Valores normalizados de paso diametral (Pd) y módulos (m) normalizados más cercanos

Elaboración propia

# 2.5. ECUACIONES PARA EL CÁLCULO GEOMÉTRICO DE LAS RUEDAS DENTADAS CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS

Existe un grupo de parámetros geométricos, que una vez conocidos, pueden ser utilizados para realizar el cálculo completo de la geometría de las ruedas dentadas cilíndricas con dientes rectos. Ellos son:

z: Número de dientes.

m: Módulo normal.

b: Ancho del diente.

x: Coeficiente de corrección del diente.

 $\alpha$ : Ángulo del perfil de la cremallera de referencia.

c\*: Factor de holgura radial (c / m).

 $h_{a}^{*}$ : Factor de altura de cabeza ( $h_{a}$  /m). Es usual en  $h_{a}^{*}$ =  $h_{FP}^{*}$  =  $h_{aP}^{*}$ 

En la Figura 2 se muestra un segmento de sector dentado donde son señalados los parámetros fundamentales de una rueda dentada cilíndrica de dientes rectos.



Figura 2. Parámetros geométricos de rueda dentada cilíndrica de dientes rectos (González Rey G., Higher contact ratios for quieter gears, 2009) A continuación, se exponen las fórmulas principales para el cálculo geométrico de las ruedas dentadas, conociendo sus parámetros fundamentales. En las siguientes fórmulas son empleados los subíndices 1 y 2 para el piñón y la rueda respectivamente.

- Diámetro de referencia  $d = m \cdot z$  Ec. 1.6
  - Diámetro de fondo  $d_f = d 2m(h_a^* + c^* x)$  Ec. 1.7 Diámetro de cresta  $d_f = 2a - d_f - 2(c^* - x)$  Ec. 1.8

Diámetro de cresta (aw es distancia interaxial) Diámetro básico Altura del diente  $d_{a_{1,2}} = 2a_w - d_{f_{2,1}} - 2(c^* \cdot m)$ EC. 1.8 EC. 1.8

diente 
$$h = 0.5 \cdot (d_a - d_f) = h_f + h_a$$
 Ec. 1.10

$$h_f = m(h_a^* - c^* - x)$$
 Ec. 1.11

Altura de cabeza del diente  $h_a = 0.5(d_a - d)$  Ec. 1.12

Altura del pie del diente

Espesor del diente en cilindro de referencia	$s = m \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x \cdot tan \alpha\right)$	EC. 1.13
Paso básico	$p_b = m \cdot \pi \cdot \cos \alpha$	Ec. 1.14

# 2.6. ECUACIONES PARA EL CÁLCULO GEOMÉTRICO DEL ENGRANE CILÍNDRICO DE DIENTES RECTOS CON EJES PARALELOS Y CONTACTO EXTERIOR

Anteriormente fueron brindadas algunas fórmulas básicas para el cálculo de la geometría de una rueda, pero al vincularse dos ruedas mediante su engrane surgen otros parámetros importantes que permiten valoraciones de su montaje y funcionamiento. A continuación, son relacionadas las principales fórmulas para el
cálculo geométrico de un engranaje cilíndrico de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior.

En la Figura 3 se muestran el contacto entre flancos conjugados de dos dientes rectos del engrane de dos ruedas cilíndricas con ejes paralelos y contacto exterior donde son señalados los parámetros geométricos fundamentales del engranaje.



Figura 3. Parámetros geométricos de un engranaje de ruedas dentadas cilíndricas de dientes rectos con contacto exterior y ejes paralelos.

(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

A continuación, se exponen las fórmulas principales para el cálculo geométrico de los parámetros fundamentales de un engranaje cilíndrico de dientes rectos con contacto exterior y ejes paralelos. En las siguientes fórmulas son empleados los subíndices 1 y 2 para el piñón y la rueda respectivamente.

Razón de engrane 
$$u = \frac{Z_2}{Z_1}$$
 Ec. 1.15

$$r_{w} = \frac{m \cdot z}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{w}}$$
 Ec. 1.16

Distancia interaxial

Radio primitivo

$$a_{w} = \frac{m \cdot (z_{1} + z_{2})}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{w}}\right)$$
 Ec. 1.17

Ángulo de  $\alpha_w = \cos^{-1}\left(\frac{m \cdot (z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha}{2 \cdot a_w}\right)$  Ec. 1.18 engranaje

Corrección sumaria

$$x_{\Sigma} = x_{1} + x_{2}$$

$$x_{\Sigma} = \frac{(inv\alpha_{wt} - inv\alpha_{t})}{2 \cdot tan\alpha} \cdot (z_{1} + z_{2})$$
EC. 1.19

Donde: 
$$inv\alpha = tan(\alpha) - \alpha$$
  
 $inv\alpha_w = tan(\alpha_w) - \alpha_w$ 

### 2.6.1. Coeficientes de corrección en los flancos de los dientes de evolvente de engranajes cilíndricos de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior

Sin lugar a duda, uno de los temas mejor dominados por los especialistas de engranajes que trabajan la ingeniería de engranajes en el sistema métrico (ISO) es el empleo racional del coeficiente de corrección relativo al módulo como parámetro adimensional que permite determinar una propuesta racional de diseño de las ruedas dentadas con mayor adaptabilidad de los flancos de los dientes a la aplicación que se requiere. Lamentablemente, para los especialistas de engranajes que han basado sus diseños en el sistema AGMA tradicional, continúa siendo un misterio el uso de este coeficiente y no son apreciadas las ventajas de este coeficiente como factor de ajuste entre los sistemas de engranajes dictados por las normas europeas y americanas. Es alentador, en este sentido, los esfuerzos de algunos especialistas, como (McVittie, 1993), (Rockwell, 2001), (González Rey, Fernández, & García Martín, 2006) por dar a conocer a los usuarios del sistema AGMA las generalidades del cálculo geométrico de engranaje con aplicación del coeficiente de corrección relativo al módulo.

Producto de la labor del Grupo de Trabajo WG5, bajo la dirección de Henry Deby, fue aprobado en 1981 un Reporte Técnico ISO<sup>•</sup> con orientaciones generales en relación con los valores límites del coeficiente de corrección en las ruedas dentadas y su distribución en el engranaje cilíndrico con contacto exterior. Aunque las recomendaciones no fueron en modo alguno de naturaleza restrictiva, finalmente pudo disponerse de una guía general sobre los valores límites de aplicación del coeficiente de corrección. La Figura 4 muestra los Límites recomendado y convencional para la suma de los coeficientes de corrección ( $\Sigma x$ = x<sub>1</sub> + x<sub>2</sub>) según ISO/TR 4467-1982.

<sup>•</sup> Technical Report ISO/TR 4467-1982; Addendum modification of the teeth of cylindrical gears for speed-reducing and speed-increasing gear pairs. ISO 1982



Figura 4. Límites recomendado y convencional para la suma de los coeficientes de corrección (Σx = x1 + x2) según ISO/TR 4467-1982. En la figura Σ<sub>Zv</sub> es la suma del número de dientes virtuales de las ruedas. (International Organization for Standardization, 1982)

Estas recomendaciones fueron importantes para evitar los inconvenientes de un mal empleo de este factor y prevenir diseños con un aguzado excesivo de los dientes, una disminución apreciable del coeficiente de recubrimiento en los engranajes o el socavado de las bases de los dientes. Indiscutiblemente, ISO/TR 4467 permitió mostrar a los especialistas de engranaje las ventajas de emplear el coeficiente de corrección en el diseño de engranajes y aplicar con confianza valores razonables de este factor en el cálculo de engranajes con mayor capacidad de carga.

En la práctica existen dos métodos básicos de elaboración de los dientes en las ruedas cilíndricas: el método de copia y el método de generación. La Figura 5 muestra el método de copia cuando se fabrican las ruedas dentadas con fresas de módulo.



Figura 5. Elaboración de ruedas dentadas mediante fresado, un típico método de copia.

(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

En el método de copia, el borde cortante de la herramienta o la matriz del molde es una copia exacta de la rueda a fabricar o una parte de ella. En cambio, durante el procedimiento de generación el borde cortante de la herramienta es capaz de crear mediante una rodadura controlada los perfiles de los dientes. La Figura 6 muestra una imagen del procedimiento de generación de ruedas dentadas con tallado por fresa madre.



Figura 6. Elaboración de ruedas dentadas con tallado por fresa madre (método de generación).

(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

El método de generación supera al método de copia, pues el procedimiento de generación permite de forma muy simple variar parámetros de las ruedas dentadas con mayor racionalidad y precisión, además de permitir el tallado de ruedas dentadas con corrección en los flancos de dientes, mediante el conveniente desplazamiento de la herramienta generadora con relación a la posición de referencia que se establece entre la rueda tallada y la recta de módulo en la herramienta empleada. véase la Figura 7.



Figura 7. Diferentes casos de tallado de ruedas en el procedimiento de generación. a) Rueda tallada sin corrección, b) Rueda tallada con corrección negativa, c) Rueda tallada con corrección positiva. (González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

La corrección de los dientes, empleando un desplazamiento radial de la herramienta durante el tallado, permite el mejoramiento de la resistencia del dentado mediante el trazado del perfil activo de los dientes por diferentes partes de la curva de evolvente de la misma circunferencia básica\*. La fabricación de ruedas con dentado corregido no es más compleja y costosa que las ruedas no corregidas. Se fabrican en la misma máquina herramienta que las empleadas para ruedas dentadas sin corrección (ruedas normales), la diferencia en su elaboración consiste en que los semiproductos exigidos se hacen con diferentes diámetros.

Eligiendo adecuadamente los coeficientes de corrección en los dientes de evolvente puede ser aumentada la capacidad de carga del engranaje y *ajustar* el montaje de las ruedas engranadas en una distancia interaxial prefijada conservando la relación de transmisión cinemática dada. Adicionalmente, con ayuda de las correcciones positivas en la rueda se puede prevenir la interferencia de los dientes engranados y posibilitar el tallado de piñones con número de dientes pequeños sin peligro del socavado de sus bases.

<sup>\*</sup> Niemann, G., Maschinenelemente, Berlín 1965

Mediante la corrección del perfil del diente puede aumentar la capacidad portante de los engranajes debido a: un aumento del ancho del diente cerca de su base, la posibilidad de reducir el número de dientes y aumentar respectivamente el módulo, el aumento de los radios de curvatura de las superficies de evolvente y la posibilidad de engranar más de un par dentado.

En la rueda y el piñón, el parámetro principal para evaluar la corrección del dentado es el coeficiente de corrección (x), que cuantifica el desplazamiento absoluto de la herramienta  $\Delta_{abs}$  con relación al módulo:

$$x_1 = \frac{\Delta_{abs1}}{m}$$
 y  $x_2 = \frac{\Delta_{abs2}}{m}$  Ec. 1.20

Es considerado un coeficiente de corrección positivo (x > 0) en caso de un alejamiento de la herramienta, en caso contrario se indica un coeficiente de corrección negativo (x<0).

En el caso del engranaje se define la corrección sumaria como:

$$x_{\Sigma} = x_1 + x_2$$
 Ec. 1.21

## 2.6.2. Relaciones matemáticas del perfil de los dientes de una rueda con dientes rectos

La geometría interna de la rueda dentada tiene como frontera el diámetro de cresta y el diámetro de fondo del dentado, ella define el tipo de rueda dentada con respecto al perfil de los flancos de los dientes. El conocimiento de la geometría interna de los engranajes permite una valoración del grado de conjugación de los flancos activos de los dientes.

La precisión del perfil del diente es determinante en la magnitud de los choques o contactos bruscos entre las ruedas del engranaje. A los efectos de evitar la arbitrariedad en la construcción del perfil del diente se han establecido curvas sencillas de ejecutar técnicamente. Si bien se plantea que con las curvas cicloidales se obtienen perfiles más exactos con una disminución importante del desgaste y choques de los dientes, estas ventajas pueden existir únicamente cuando la distancia entre los centros de los engranajes se mantiene rigurosamente invariable. Con la curva de evolvente el perfil que se obtiene es simple y fácil de ejecutar, no existiendo la necesidad de mantener la distancia entre ejes invariable para que el engrane se realice en buenas condiciones. En general, la forma más difundida de los flancos de los dientes en los engranajes cilíndricos de ejes paralelos son los perfiles simétricos con curvas de evolvente. En la práctica otros perfiles, como son los dientes con perfiles asimétricos, perfiles cicloidales y perfiles redondos (Dobrovolski, 1991) (Baranov, 1979), pueden ser empleados, pero con menos frecuencia.

La preferencia por el perfil de evolvente se establece por la normalización de las herramientas de corte con flancos rectos para la generación de los dientes de las ruedas de engranajes y por la posibilidad que ofrece la curva de evolvente de tallar ruedas con corrección del perfil de los dientes mediante el desplazamiento radial relativo entre la herramienta de generación y el semiproducto de la rueda dentada. El mencionado desplazamiento permite utilizar un perfil de trabajo de los dientes más adecuado a una aplicación u otra con una simple variación del radio de curvatura de los flancos de los dientes en las ruedas del engranaje.

Sobre la curva evolvente que forma el flanco de un diente de engranaje existe amplia información. Prácticamente en todos los textos que tratan la geometría y cinemática de los engranajes evolventes describen las características de esta curva. Sin embargo, la curva que define la zona de redondeo del pie del diente, cuando éste es fabricado por generación, es mucho menos tratada en la literatura especializada, el nombre que comúnmente recibe esta curva es *trocoide*. La mayoría de los autores, cuando tratan la generación del flanco del diente mediante una modelación matemática, sustituyen la trocoide por un arco de circunferencia para simplificar los análisis.

#### Coordenadas cartesianas de la curva de evolvente (Coord x, Coord y):

La variable independiente  $d_y$  es empleada para generar la curva de evolvente

Coord 
$$x = 0.5 \cdot d_y \cdot sen \gamma_y$$
 Ec. 1.22

Coord 
$$y = 0.5 \cdot d_y \cdot \cos \gamma_y$$
 Ec. 1.23

Siendo:

$$d_{yn} = m \cdot z - d + d_y \qquad \text{Ec. 1.24}$$

$$\alpha_{yn} = \cos^{-1} \left( \frac{d_b}{d_{yn}} \right) \qquad \text{Ec. 1.25}$$

$$\gamma_{yn} = \frac{0.5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot tan \alpha}{z} + inv \alpha - inv \alpha_{yn} \qquad \text{Ec. 1.26}$$

#### Coordenadas cartesianas de la curva de trocoide $(x(\phi), y(\phi))$ :

La variable independiente  $\phi$  es empleada para generar la curva de trocoide.

$$x_{(\phi)} = x_M \cdot cos\left(\frac{\pi}{z}\right) + y_M \cdot sen\left(\frac{\pi}{z}\right)$$
 Ec. 1.27

$$y_{(\phi)} = -x_M \cdot sen\left(\frac{\pi}{z}\right) + y_M \cdot cos\left(\frac{\pi}{z}\right)$$
 Ec. 1.28

Siendo:

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot m - \left(ha^* + c^*\right) \cdot m \cdot tan \alpha - m\left(\rho_f^*\right) \cdot \left(\frac{1 - sen \alpha}{cos \alpha}\right) \quad \text{Ec.}$$

7

$$H = (h_a^* + c^* - x - \rho_f^*) \cdot m$$
 Ec. 1.30

$$x_T = -(0.5 \cdot m \cdot z \cdot \phi + E) \cdot \cos \phi + (0.5 \cdot m \cdot z - H) \cdot \sin \phi \quad \text{Ec. 1.31}$$

$$y_T = (0.5 \cdot m \cdot z \cdot \phi + E) \cdot sen \phi + (0.5 \cdot m \cdot z - H) \cdot cos \phi \quad \text{Ec. 1.32}$$

$$x_{M} = x_{T} - \left[ \frac{\left| (0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot tan \phi \right|}{H - (0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E) \cdot tan \phi} \right| \cdot \frac{\rho_{f}^{*} \cdot m}{\sqrt{1 - \left( \frac{(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot tan \phi}{H + (0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E) \cdot tan \phi} \right)^{2}} \right]^{\text{EC. 1.33}}$$

$$y_{M} = y_{T} - \frac{\rho_{f}^{*} \cdot m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) + H \cdot tan\phi}{H + \left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) \cdot tan\phi}\right)^{2}}}; \operatorname{si} \frac{\left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) + H \cdot tan\phi}{H - \left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) \cdot tan\phi} > 0 \quad \text{Ec. 1.34}$$

$$y_{M} = y_{T} + \frac{\rho_{f}^{*} \cdot m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) + H \cdot tan\phi}{H + \left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) \cdot tan\phi}\right)^{2}}}; \text{ si} \frac{\left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) + H \cdot tan\phi}{H - \left(0.5 \cdot z \cdot m \cdot \phi + E\right) \cdot tan\phi} < 0 \text{ Ec. 1.35}$$

En el presente trabajo (ver Capitulo 5), ha sido elaborado un procedimiento práctico para permitir la aplicación del Método de los Elementos Finitos en un engranaje cilíndrico con contacto exterior y ejes paralelos mediante la generación de ruedas cilíndricas con dientes rectos y haciendo empleo de las formulaciones paramétricas de la curva de la trocoide presentadas por Henriot en 1999 (Georges, 1999) y por Gonzalez-Rey en 2002 (González Rey, García Martín, & Frechilla Fernández, 2006). En las Figuras 8 y hasta la 1.11 se muestran las bases del trazado del perfil del diente, el origen de coordenadas de los pares (x,y) correspondientes al lugar geométrico de localización de los puntos de las curva de evolvente y la curva de trocoide que perfilaran el flanco del diente.



Figura 8. Representación de las dimensiones y perfil de la cremallera de referencia de los dientes (perfil acabado).

(González Rey G., Higher contact ratios for quieter gears, 2009)



Figura 9. Esquema del vínculo entre el borde superior de la herramienta y el corte del fondo del diente. Elaboración propia





Figura 11. Esquema de la ubicación de los puntos extremos de las curvas que componen el flanco activo del diente.

(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

El contorno del perfil del diente se realiza considerando el trazado de tres partes, según se refiere a continuación.

#### Primer trazado.

Corresponde con la cresta del diente (trazado entre puntos 1 y 2), y sus coordenadas límites se definen en función del diámetro de cresta de la rueda.

Punto 1: 
$$\left(0, \frac{da}{2}\right)$$
  
Punto 2:  $\left(\frac{da}{2} \cdot sen\gamma_a, \frac{da}{2} \cdot \cos\gamma_a\right)$ 

Siendo:

$$\alpha_a = \cos^{-1}(\frac{d_b}{da})$$
 Ec. 1.36

$$\gamma_a = \frac{0.5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot tan \alpha}{z} + inv\alpha - inv\alpha_a \quad \text{Ec. 1.37}$$

#### Segundo trazado.

Corresponde con la parte del perfil del diente que contiene un perfil de curva de evolvente (trazado entre puntos 2 y 3), y sus coordenadas límites se definen en función de la geometría externa de la rueda y el flanco recto del borde cortante de la herramienta de generación. El trazado de la curva de evolvente se realiza evaluando las fórmulas con diferentes valores en disminución consecutiva del diámetro "d" entre el valor del diámetro de cresta y el punto 3 correspondiente al momento del corte de la curva de evolvente por la interferencia de la herramienta de corte.

Punto 3: 
$$\binom{d_{\text{int erf}}}{2} \cdot sen\gamma_{\text{int erf}}, \frac{d_{\text{int erf}}}{2} \cdot \cos\gamma_{\text{int erf}}$$

Siendo:

$$d_{\text{int erf}} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot z_v \cdot sen\alpha}{2} - \frac{(ha^* - x) \cdot m}{sen\alpha}\right)^2} \quad \text{Ec. 1.38}$$

$$\alpha_{\text{int erf}} = \cos^{-1}(\frac{d_{bn}}{d_{\text{int erf}}})$$
 Ec. 1.39

$$\gamma_{\text{int erf}} = \frac{0.5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha}{z_v} + inv\alpha - inv\alpha_{\text{int erf}} \qquad \text{Ec. 1.40}$$

#### Tercer trazado.

Corresponde con la parte del diente que contiene un perfil de curva de trocoide y el fondo del espacio entre dientes (trazado entre puntos 3 y 4). Las coordenadas límites se definen en función de la geometría externa de la rueda y parámetros de la herramienta de corte incluyendo su extremo cortante de la cresta y el radio superior de redondeado. El trazado de esta zona se realiza evaluando desde  $\phi = 0$ hasta el valor de  $\phi$  que produzca un par de coordenadas por encima del punto 3. Desde la coordenada correspondiente a  $\phi = 0$  se traza una curva con el radio de fondo hasta el punto 4.

Punto 4: 
$$\left(\frac{df}{2} \cdot sen(180/z_v), \frac{df}{2} \cdot cos(180/z_v)\right)$$

# 2.6.3. limitaciones (restricciones) en las soluciones geométricas de un engranaje cilíndrico con dientes rectos

Es importante reconocer, para que sea válida prácticamente la capacidad de carga calculada, que los engranajes deben cumplir ciertos índices de calidad geométrica, asociados con posibles limitaciones a sus dimensiones, el normal funcionamiento del engranaje y/o la resistencia de la cresta de los dientes. Generalmente, el cumplimiento de estos aspectos es analizado a partir de valores límites e indicadores geométricos que establecen restricciones en el campo de las soluciones posibles para las diferentes combinaciones de los parámetros geométricos del engranaje.

#### Coeficiente de recubrimiento ( $\epsilon$ ).

Por definición, el coeficiente de recubrimiento  $\varepsilon$  (también razón de contacto) es la relación entre el ángulo de giro de una rueda en un engranaje, desde la entrada en contacto de un diente conjugado hasta la salida de este (ángulo de recubrimiento), con respecto a su paso angular (American Gear Manufacturers Association;, 2011).

En engranajes cilíndricos de dientes rectos, ejes paralelos y contacto exterior, el valor numérico del coeficiente de recubrimiento permite evaluar la continuidad del movimiento y el reparto de la carga entre los dientes sobre la línea práctica del engranaje. En cierta manera, constituye el valor promedio de pares de dientes en contacto a lo largo de la línea de engranaje en el plano transversal. Valores no enteros del coeficiente de recubrimiento significan que la cantidad de pares en contacto es igual al número entero superior, durante una parte de la mencionada línea, mientras en la parte restante la cantidad de pares en contacto es igual al número entero.

Con el objetivo de lograr, sobre la línea práctica del engranaje, un contacto permanente entre los dientes, se requiere teóricamente un valor de coeficiente de recubrimiento igual o mayor a la unidad ( $\varepsilon \ge 1$ ). En dependencia del grado de precisión alcanzado en el paso de los dientes durante la elaboración, prácticamente los valores mínimos recomendados para engranajes cilíndricos se encuentran entre 1,1 y 1,2 (Mott, Vavrek, & Wang, 2018), (Linke, Börner, & Heß, 2016), (Radzevich, 2016). En el presente trabajo será aceptado que:

$$\varepsilon = \frac{0.5 \cdot \left(\sqrt{d_{a_1}^2 - d_{b_1}^2} + \sqrt{d_{a_2}^2 - d_{b_2}^2}\right) - a_w \cdot sen \, \alpha_w}{m \cdot \pi \cdot cos \, \alpha} \ge 1,2 \qquad \text{Ec. 1.41}$$

#### Espesor de cresta del diente $s_{\alpha}$ .

Es conocido que en dientes muy puntiagudos en la parte superior puede producirse la fractura de sus crestas por cizalladura. Recomendaciones prácticas (Dobrovolski, 1991), (Reshetov, 1985), (Golubev, 1975) han establecido que el espesor mínimo para el vértice de los dientes en ruedas dentadas cilíndricas oscile entre un 20% y 40% del módulo normal. Tomándose los menores valores para dientes con dureza volumétrica del material y los mayores para dientes de módulos pequeños (preferentemente) con superficies endurecidas.

Por tal motivo, fue decidido en este trabajo que el espesor de cresta del diente debe garantizar que:

$$s_{a_1}^* = \frac{s_{a_1}}{m} = \frac{d_{a_1}}{m} \cdot \left(\frac{s_1}{d_1} + inv\alpha - inv\alpha_{a_1}\right) \ge (0,3...0,4)$$
 Ec. 1.42

$$s_{a_2}^* = \frac{s_{a_2}}{m} = \frac{d_{a_2}}{m} \cdot \left(\frac{s_2}{d_2} + inv\alpha - inv\alpha_{a_2}\right) \ge (0,3...0,4)$$
 Ec. 1.43

#### Interferencia en el engranaje.

En el caso más general, la interferencia de los dientes se define como el fenómeno que se produce, entre un par de dientes en un engranaje de ruedas dentadas, cuando sus perfiles tienden a penetrar el uno dentro de otro. Esta definición, concuerda en gran medida con las declaradas por Linke (Linke, Börner, & Heß, 2016) y Radzevich (Radzevich, 2016).

En los engranajes de ruedas cilíndricas con ejes paralelos, este fenómeno se define algo mejor, entendiéndose por interferencia cuando el contacto entre los dientes en un engranaje es realizado en partes donde el flanco activo de los dientes no corresponde a una curva de evolvente o se establece fuera de la línea de engranaje (MAAG Gear Company;, 1990). Esta definición le ha permitido a la firma suiza MAAG Gear el establecimiento de una guía general aplicable a los engranajes cilíndricos para evitar la interferencia y un procedimiento de control numérico de este fenómeno. El procedimiento en cuestión prevé la verificación de dos posibles interferencias entre: la cresta del diente de la rueda con el pie del diente del piñón y la cresta del diente del piñón con el pie del diente de la rueda.

Se considera que la interferencia no ocurre si los dientes hacen contacto con la parte de los flancos correspondiente a una curva de evolvente y sobre la línea de engranaje. El procedimiento prevé determinar la no ocurrencia de la interferencia si se cumple que:

$$g_{inv} \le g_{inv}$$
$$g_{a_2} \le a_w \cdot sen\alpha_w$$

La identificación de los parámetros geométricos involucrados en la verificación del fenómeno de la interferencia se muestra en la Figura 12.



Figura 12. Identificación de los parámetros geométricos involucrados en el cálculo de la interferencia en el plano que contiene la línea práctica de engranaje.
(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

En la Figura 12 el trazo 1 corresponde al perfil recto de la herramienta de generación y el trazo 2 corresponde al perfil de evolvente del diente del piñón en el punto R'. Además, el punto R'' es localizados sobre la línea de engranaje donde empieza la generación de la curva de evolvente en el pie del diente. Siendo:

$$g_{inv} = \frac{d_{b1}}{2} \cdot \tan \alpha - \frac{h_{inv}}{sen \alpha} = \frac{d_{b1}}{2} \cdot \tan \alpha - \frac{m(h_a^* + c^* - \rho_f^*(1 - sen\alpha) - x_1)}{sen \alpha} \quad \text{Ec. 1.44}$$

$$g_{inv}' = a_w \cdot sen \ \alpha_w - \frac{d_{b2}}{2} \cdot tan \ \alpha_{a2}$$
 Ec. 1.45

$$\alpha_{a_2} = \cos^{-1}\left(\frac{d_{b2}}{d_{a2}}\right)$$

Ec. 1.47

## 2.6.4. Daños por picadura en el flanco de los dientes de engranajes cilíndricos asociados al esfuerzo de contacto

Existe un gran número de fallas posibles en los engranajes de dientes rectos, los cuales disminuyen de una manera u otra la vida útil o su desempeño; estos daños ocurren en diferentes etapas de un engranaje ya que va desde errores en diseño, pasando por errores en la manufactura o en el tratamiento térmico de las ruedas dentadas, hasta daños ocasionados por las condiciones de operación (velocidades, cargas, lubricación entre otras). Pero así mismo, conforme se han identificado estas fallas se ha trabajado en los aspectos requeridos para su disminución, buscando, aumentar la vida útil del engranaje, reducción de costos y la reducción del mantenimiento.

Las formas en las que falla un engranaje son diversas ya que depende tanto de su diseño y manufactura como de la aplicación y condiciones de trabajo a las cuales está sometido, la clasificación de estas fallas depende mucho de la identificación basada en el estudio de las marcas o pistas que dejan en la superficie de los flancos activos de los dientes del engranaje.

Con esta información, se pueden identificar 5 tipos básicos de fallas:

- Desgaste
- Fatiga superficial
- Flujo plástico
- Rotura de dientes
- Fallas combinadas

Recordando el movimiento fundamental de un engranaje, puede ser entendido el tipo de contacto entre los dientes que ocurre principalmente en el ancho del

diente y en presencia de un movimiento de rodadura y deslizamiento combinado (ver Figura 13).



Figura 13. Movimiento del engranaje. (González Rey G. , Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

En ausencia de una buena lubricación ocurren mayormente las fallas con base en el desgaste de los dientes que se basan principalmente en daños ocasionados en la cara del diente por desprendimiento de pequeñas capas de metal, esto provocado por *bajo lubricante* (choque metal con metal), partículas abrasivas en el lubricante, remoción de la película de lubricante por adelgazamiento (deterioro del lubricante) o desgaste químico provocado por algunos aditivos en el engranaje. En particular, en presencia de una buena lubricación, el deterioro por picadura es uno de los fallos frecuentes que deben ser considerados en el engranaje y este tipo de deterioro fue base para el presente trabajo.

#### Picadura

Como antes fue afirmado, los dientes de engranes acoplados tienen una combinación de rodamiento y deslizamiento. El porcentaje de deslizamiento se incrementa con la distancia a partir de la zona de tangencia de las circunferencias primitivas. En general, los esfuerzos en la superficie del diente son esfuerzos de contacto hertzianos dinámicos con rodadura y deslizamiento combinados.

En particular, el deterioro por picadura de los dientes de los engranajes es un fenómeno físico que se presenta en ambientes en los cuales la lubricación se convierte en un factor de riesgo operativo debido a que al conjugarse dos caras que transmiten movimiento y potencia, provocan un aprisionamiento en el lubricante que a su vez ocasiona que "salgan" disparadas pequeñas partículas del lubricante que chocan incansablemente en las paredes de los dientes conjugados de las ruedas del engranaje, esto se repite millones de veces en cortos lapsos de tiempo, lo que va provocando pequeñas fisuras que van aumentando su tamaño debido a la continuidad de este choque de partículas, sumado a los esfuerzos que se presentan en la transmisión del movimiento ya que al ir desgastando el perfil del diente disminuye su volumen y provoca un aumento en los esfuerzos volumétrico y cargas dinámicas por contacto entre dientes que presentan sus perfiles de trabajo alterados por la picadura.

Este tipo de desgaste inicialmente es superficial, pero conforme se van desprendiendo capas de la cara del engranaje, estas van adquiriendo profundidad debido a la intermitencia del contacto entre dientes que ocurren en millones de ciclos.

En ruedas con durezas de flancos de dientes semejantes, este fenómeno se presenta más rápidamente en el piñón debido a que, al ser un valor de diámetro más pequeño que la rueda, tiene un mayor número de ciclos de carga. Como podemos ver, la picadura es un fenómeno que no se puede detener, sólo mitigar; este problema se presenta en niveles diferentes y se deben de identificar lo más tempranamente posible. Se presenta en dos niveles: Inicial y destructivo.

 Picado inicial (figura 14), este se presenta sólo en pequeñas áreas y se mitiga con una mejor distribución de cargas, ocurre por la presencia de desalineación de los dientes o superficies irregulares.



Note como coinciden el daño y los sentidos de deslizamiento. Daño típico de perfiles del diente.

Figura 14. Efectos de los sentidos de deslizamiento sobre la superficie del diente. (Benitez Hernández, 1985)

 Picado destructivo (Figura 15), el crecimiento del picado inicial provoca que se desarrollen cráteres de picado, que ocasiona la destrucción del perfil del diente y a su vez la consecuente fractura.



Figura 15. Picado destructivo. (Benitez Hernández, 1985)



Figura 16. Fractura por picadura (Benitez Hernández, 1985).

Como se puede observar, este tipo de daño tiene características únicas, es silencioso y prolongado, por lo que es muy importante tener una proyección del daño y los esfuerzos limites que pudiera alcanzar.

### 3. MODELO MATEMÁTICO

### 3.1. MODELO MATEMÁTICO CON INTERRELACIÓN DE LA GEOMETRÍA Y LA CAPACIDAD DE CARGA A ESFUERZOS DE CONTACTO

En este capítulo se presenta el desarrollo de un modelo matemático con interrelación de la geometría y la capacidad de carga a esfuerzos de contacto, típicos de los deterioros por picadura de los flancos de los dientes, en engranajes cilíndricos con dientes rectos y contacto exterior considerando las condiciones de operación, diseño y fabricación.

### 3.1.1. Esfuerzos de contacto en engranajes cilíndricos de dientes rectos con contacto exterior y ejes paralelos

En la actualidad, el procedimiento aceptado para evaluar la resistencia a la picadura de los dientes en los engranajes cilíndricos toma como referencia el modelo formado por dos cilindros en contacto oprimidos con una fuerza igual a la fuerza normal ( $F_N$ ) entre los dientes conjugados.

La Figura 17 muestra el modelo que permite desarrollar las ecuaciones de Hertz para evaluar los esfuerzos de contacto, considerando que los cilindros tienen radios  $(\rho_1 \vee \rho_2)$  iguales al de los flancos activos de los dientes cuando realizan contacto en la posición definida para evaluar los esfuerzos de contacto. Por otra parte, la longitud de los cilindros  $(I_{\Sigma})$  se considera igual a la suma de los segmentos de contacto mutuo entre los dientes conjugados.

La comprobación de la resistencia a la picadura de las superficies activas de los dientes se basa en comparar el máximo esfuerzo de contacto nominal, según la ecuación de presión de contacto de *Hertz* (Pedrero, Artés, Pleguezuelos, García Masiá, & Fuentes, 1999), con el esfuerzo admisible para que no ocurra el deterioro por picadura.



Figura 17. Modelo de referencia para el cálculo de los esfuerzos de contacto en los flancos de los dientes de engranajes cilíndricos.

(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

La ecuación (3.1) es la fórmula de Hertz para determinar los esfuerzos de contacto, en dos cilindros con radios  $\rho_1$  y  $\rho_2$  y longitudes  $l_{\Sigma}$  correspondientes al ancho de engranaje y estableciendo un contacto exterior.

$$\sigma_{H} = \sqrt{\frac{E_{1} \cdot E_{2}}{\pi \cdot \left[E_{1} \cdot \left(1 - \upsilon_{2}^{2}\right) + E_{2} \cdot \left(1 - \upsilon_{1}^{2}\right)\right]} \cdot \frac{F_{n}}{l_{\Sigma} \cdot \rho_{red}}}$$
(MPa) Ec. 3.1

$$\rho_{red} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (mm) \quad \text{Ec. 3.2}$$

Donde:

- E1 y E2 = Módulo de elasticidad del material de los dientes en piñón y rueda (MPa).
- v1 y v2 = Coeficiente de deformación transversal (Poisson) del material de los dientes del piñón y de los dientes de la rueda.
- $F_n$  = Fuerza normal en el flanco de los dientes (N).
- $I_{\Sigma}$  = Longitud de contacto de los cilindros (mm).
- pred = Radio de curvatura reducido de los cilindros (mm)

Aunque la forma y el contacto de los dientes no corresponden exactamente con los cilindros del modelo geométrico utilizado para evaluar los esfuerzos de contacto reales máximos en el engranaje, es enmendada la falta de concordancia entre las premisas teóricas de la fórmula de *Hertz* con las condiciones reales de carga en los dientes empleando factores experimentales y teóricos que precisan el valor de carga nominal de cálculo, la longitud efectiva del contacto entre dientes y los radios de curvatura de los perfiles activo de los dientes del piñón y la rueda en el engranaje.

La Figura 18 muestra los puntos significativos del contacto entre dientes sobre la línea de engranaje. Los puntos A y F identifican el inicio y fin de la línea práctica de engranaje y representan los extremos del segmento donde ocurre el contacto en los dientes engranados de las ruedas conjugadas. Los puntos A y F son delimitados en la línea de engranaje con la intersección de las circunferencias de cresta del piñón (con radio r<sub>a1</sub>) y de la rueda (con radio r<sub>a2</sub>). El polo identifica el punto donde hacen tangencia las circunferencias primitivas que simulan el movimiento de las ruedas dentadas cilíndricas engranadas y además está contenido en la recta que pasa por los centros de rotación de las ruedas. Los puntos LPSTC (acrónimo del inglés: Lowest Point of Single Tooth Contact), y HPSTC (Highest Point of Single Tooth Contact) identifican los extremos del segmento de la línea de engranaje donde ocurre el contacto de un solo par de dientes de las ruedas conjugadas.



Figura 18. Vista de línea de acción de un engranaje cilíndrico de dientes rectos. (González Rey G. , Higher contact ratios for quieter gears, 2009)

Con base en la anterior fórmula de Hertz es obtenida la ecuación (3.3) para el cálculo de los esfuerzos máximos de contacto en los flancos de los dientes según AGMA 2101. La novedad en la norma AGMA 2101-D04 es que por primera vez son presentadas en sistema métrico las relaciones de cálculo que anteriormente estaban referidas con base en el paso (pitch) y nomenclatura anglosajona.

Según AGMA: 
$$\sigma_{\rm H} = Z_{\rm E} \cdot \sqrt{\frac{F_{\rm t} \cdot K_{\rm O} \cdot K_{\rm V} \cdot K_{\rm H} \cdot K_{\rm S} \cdot Z_{\rm R}}{d_{\rm w1} \cdot b \cdot Z_{\rm I}}}$$
 (MPa) Ec. 3.3

Donde:

- $\sigma_{H}$  = Esfuerzo máximo de contacto nominal (MPa).
- $Z_E$  = Factor de elasticidad (MPa<sup>1/2</sup>).
- Ft = Fuerza tangencial nominal (N).
- $K_{\odot}$  = Factor por aplicación de la carga.
- K<sub>V</sub> = Factor por carga dinámica.
- K<sub>H</sub> = Factor por concentración de carga en el flanco del diente.
- Ks = Factor por tamaño.
- $Z_R$  = Factor por rugosidad.
- dw1 = Diámetro primitivo del piñón (mm).
- b = Ancho de engranaje (mm).
- Z<sub>1</sub> = Factor geométrico de resistencia a la picadura.

La norma AGMA 2101-D04, en el caso de engranajes cilíndricos con dientes rectos, considera los radios de curvaturas de los flancos activos de los dientes (coincidentes con los radios de los cilindros del modelo de *Hertz*) en la zona crítica donde inicia la transmisión de carga un solo par de diente (LPSTC). Este aspecto se considera con el factor geométrico de resistencia a la picadura Z<sub>1</sub> (conocido como factor geométrico I). En el caso de engranajes cilíndricos de dientes rectos, la norma AGMA evalúa la longitud total de contacto ( $I_{\Sigma}$ ) igual al ancho de engrane de un par de dientes, consecuentemente con el supuesto de que solo un par de dientes trasmite la carga. La Figura 19 muestra el supuesto punto de análisis (LPSTC) de los flancos activos de los dientes en el punto de inicio del contacto monopar en la línea de engranaje.



Figura 19. Diferentes sectores del engranaje con 1 y 2 pares de dientes en contacto sobre la línea de engranaje ( $1 \le \epsilon \le 2$ ).

(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

#### 3.1.2. Consideraciones en el desarrollo del modelo matemático

El modelo matemático desarrollado consideró una interrelación del esfuerzo de contacto en los flancos activos de los dientes con la geometría de las ruedas, las condiciones de operación del engranaje y aspectos relevantes de la fabricación vinculantes con el diseño de la transmisión.

El modelo matemático, basado en formulaciones de ANSI-AGMA 2101-D04, sirvió de partida para establecer la solución al problema de determinar el esfuerzo de contacto en el engranaje cilíndrico con empleo de técnica de grafos.

En particular, los grafos de los modelos matemáticos empleados en este trabajo representan con vértices en forma de hexágono las relaciones entre variables y con vértices en forma de círculo y elipse las diferentes variables interrelacionadas.

La Tabla 5 identifica las 51 variables participantes en el modelo matemático general.

Tabla 5. Simbología y unidades de variables participantes en el modelo matemático general.

No.	Variables	Unidad	Descripción:			
1	U		Razón de engrane			
2	Zı		Cantidad de dientes en el piñón			
3	Z2		Cantidad de dientes en la rueda			
4	d <sub>w1</sub>	mm	Diámetro primitivo del piñón			
5	d <sub>b1</sub>	mm	Diámetro básico del piñón			
6	daı	mm	Diámetro de cresta del piñón			
7	d <sub>f2</sub>	mm	Diámetro de fondo de la rueda			
8	Qw	mm	Distancia entre ejes de las ruedas			
9	m	mm	Módulo			
10	b	mm	Ancho de engranaje			
11	α (alfa)	0	Ángulo del perfil de cremallera de referencia			
12	ha*		Factor de altura de la cabeza del diente			
13	C*		Factor de holgura radial			
14	X1		Coeficiente de corrección del perfil de			
			dientes del piñón			
15	X2		Coeficiente de corrección del perfil de			
			dientes de la rueda			
16	x <sub>Σ</sub> (xsuma)		Corrección sumaria			
17	α <sub>w</sub> (alfaw)	0	Ángulo de engranaje en plano transversal			
18	ρı (rol)	mm	Radio del flanco de contacto en diente del			
			piñón			

No.	Variables	Unidad	Descripción:				
19	ρ <sub>2</sub> (ro2)	mm	Radio del flanco de contacto en diente de la				
			rueda				
20	nı	min <sup>-1</sup>	Revoluciones por minuto del piñón				
21	ZE	MPa <sup>1/2</sup>	Factor de elasticidad				
22	Eı	MPa	Módulo de elasticidad del material del piñón				
23	v1 (miu1)		Coeficiente de Poisson del material del piñón				
24	E <sub>2</sub>	MPa	Módulo de elasticidad del material de la				
			rueda				
25	v <sub>2</sub> (miu2)		Coeficiente de Poisson del material de la				
			rueda				
26	Ft	Ν	Fuerza tangencial en piñón				
27	V	m/s	Velocidad tangencial en las ruedas				
28	σн (sigmaH).	MPa	Esfuerzo máximo de contacto nominal				
29	Ко		Factor por aplicación de carga				
30	Kv		Factor por carga dinámica.				
31	Кн		Factor por carga concentrada en flanco del				
			diente				
32	Ks		Factor por tamaño.				
33	Z <sub>R</sub>		Factor por rugosidad.				
34	Zı		Factor geométrico de resistencia a la				
			picadura.				
35	В		Factor auxiliar de cálculo del Kv.				
36	С		Factor auxiliar de cálculo del Kv.				
37	QISO		Grado de precisión del engranaje				

No.	Variables	Unidad	Descripción:
38	KH <sub>mc</sub>		Factor por modificación del flanco de diente
39	KH <sub>pf</sub>		Factor por ancho relativo del piñón
40	KH <sub>pm</sub>		Factor por ubicación del piñón
41	KH <sub>ma</sub>		Factor por calidad de la manufactura
42	KHe		Factor por calidad del ajuste del montaje.
43	S/S1		Relación geométrica en el montaje
44	A <sub>ma</sub>		Coeficiente A para calcular KH <sub>ma</sub>
45	B <sub>ma</sub>		Coeficiente B para calcular $KH_{ma}$
46	Cma		Coeficiente C para calcular KH <sub>ma</sub>
47	Prop. no uniforme		Propiedades no uniformes del material.
	del material		
48	Condición de		Condiciones de superficie de contacto de los
	superficie		dientes
49	Máq. mov. y		Régimen de máquina movida y motriz
	mot		
50	Modif. generatriz		Corrección en la generatriz del flanco de los
	flanco diente		dientes
51	Calidad del		Calidad del ajuste en el montaje de las
	montaje		ruedas

Elaboración propia

# 3.1.3. Modelo matemático con interrelación de la geometría y la capacidad de carga a esfuerzos de contacto

A continuación, se presenta el modelo matemático general de un engranaje cilíndrico con dientes rectos de ejes paralelos y contacto exterior con las relaciones pertinentes del esfuerzo de contacto en el flanco de los dientes y la geometría requerida considerando las condiciones de operación y fabricación de las ruedas.

Tabla 6. Modelo matemático general de engranaje cilíndrico de acero con dientes rectos de ejes paralelos y contacto exterior con interrelación del esfuerzo de contacto, geometría involucrada y condiciones de operación y fabricación de las ruedas.

$u \cdot z_1 - z_2 = 0$	(R01)
$d_{WI} \cdot (u+1) - 2 \cdot a_W = 0$	(R02)
$d_{bl} - m \cdot z_l \cdot \cos \alpha = 0$	(R03)
$2 \cdot a_w - d_{f2} - 2 \cdot c^* \cdot m - d_{a1} = 0$	(R04)
$m \cdot z_2 - 2 \cdot m \cdot \left(ha^* + c^* - x_2\right) - d_{f2} = 0$	(R05)
$2 \cdot a_w \cdot \cos \alpha_w - m \cdot (z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha = 0$	(R06)
$\frac{inv \alpha_w - inv \alpha}{2 \cdot tan \alpha} (z_1 + z_2) - x_{\Sigma} = 0$	(R07)
$x_2 + x_1 - x_{\Sigma} = 0$	(R08)
$\rho_{I} + m \cdot \pi \cdot \cos \alpha - \sqrt{\left(\frac{d_{aI}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{d_{bI}}{2}\right)^{2}} = 0$	(R09)
$\rho_2 + \rho_1 - a_w \cdot sen \ \alpha_w = 0$	(R10)
$(Z_E)^2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1 - \upsilon_1^2}{E_1} + \frac{1 - \upsilon_2^2}{E_2}\right] - 1 = 0$	(R11)
$F_T \cdot V - 1000 \cdot P = 0$	(R12)

$60000 \cdot V - \left(n_{I} \cdot \pi \cdot d_{WI}\right) = 0$	(R13)
$\left(\frac{\sigma_H}{Z_E}\right)^2 \cdot b \cdot d_{w1} \cdot Z_I - F_T \cdot K_0 \cdot K_V \cdot K_H \cdot K_S \cdot Z_R = 0$	(R14)
$K_{s} = f \begin{pmatrix} propiedades \ no \\ uniformes \ del \ material \\ de \ las \ ruedas \end{pmatrix}$	(R15)
$Z_{R} = f \begin{pmatrix} condiciones \ de \ las \\ sup \ erficies \ en \ contacto \\ de \ los \ dientes \end{pmatrix}$	(R16)
50 + 56(1 - B) - C = 0	(R17)
$B - 0.25 \cdot (Q_{ISO} - 5)^{0.667} = 0$	(R18)
$K_{0} = f \begin{pmatrix} máquina \ motriz, \\ máquina \ movida, \\ régimen \ de \ trabajo \end{pmatrix}$	(R19)
$Kv - \left(\frac{C}{C + \sqrt{196.85 \cdot V}}\right)^{-B} = 0$	(R20)
$I + K_{Hmc} \cdot \left( K_{Hpf} \cdot K_{Hpm} + K_{Hma} \cdot K_{He} \right) - K_{H} = 0$	(R21)
$K_{Hmc} = f \begin{pmatrix} corrección \ en \\ generatríz \ del \\ flanco \ de \ los \\ dientes \end{pmatrix}$	(R22)
K <sub>Hmc</sub> = 1,0 Ruedas sin modificación en flanco de los dientes	
K <sub>Hmc</sub> = 0,8 Ruedas con modificación en flanco de los dientes.	
Para $b \le 25 \text{ mm}$ $K_{Hpf} = \frac{b}{10 \cdot d_{W1}} - 0.025$	(R23)
Para 25 < b ≤ 432 mm $K_{Hpf} = \frac{b}{10 \cdot d_{WI}} - 0.0375 + 0.000492 \cdot b$	
Para valores de $\frac{b}{10 \cdot d_{WI}} < 0.05$ Usar 0.05	

Linea en la mitad de la rueda dentada Linea en la mitad del cojinete $S_1$ $+ S_1$ $+ S_2$ $- S_2$ $K_{Hpm} = 1,0$ Para $(S_1 / S) < 0.$ $K_{Hpm} = 1,1$ Para $(S_1 / S) \ge 0.$	en la mitad del cojinete				(R24)
$A_{ma} + B_{ma} \cdot b + C_{ma} \cdot b^2 - K_{Hma} = 0$ Tabla 7. Coeficientes auxiengranaje Calidad del engranaje Engranaje abierto Engranaje abierto Engranaje cerrado y calidad comercial. Engranaje de precisión cerrado Engranaje con elevada precisión y cerrado	iliares del <b>A</b> ma 0,247 0,127 0,0675 0,0380	factor KHma s <b>B</b> ma 0,657 x 10 <sup>-3</sup> 0,622 x 10 <sup>-3</sup> 0,504 x 10 <sup>-3</sup> 0,402 x 10 <sup>-3</sup>	egún calidad c Cma -1.186 x 10 <sup>-7</sup> -1.69 x 10 <sup>-7</sup> -1.44 x 10 <sup>-7</sup> -1.27 x 10 <sup>-7</sup>	lel	(R25)
$K_{He} = 1,0$ Engranajes sin asentamiento adecuado en el montaje. $K_{He} = 0,8$ Engranajes con asentamiento antes de iniciar el trabajo					(R26)
$Z_{I} \cdot \left(\frac{1}{\rho_{I}} + \frac{1}{\rho_{2}}\right) \cdot d_{wI} - \cos \alpha_{w} = 0$					(R27)

#### Elaboración propia

La Figura 20 muestra la organización general del modelo matemático mediante un grafo donde las variables son identificadas con círculos y elipses y las relaciones con hexágonos. El grafo del modelo muestra la interrelación de la geometría del engranaje, condiciones de operación, aspectos de diseño, fabricación y montaje en interrelación con el esfuerzo de contacto nominal de un engranaje cilíndrico de dientes rectos y ejes paralelos con contacto exterior.



Figura 20. Grafo de modelo matemático general. Elaboración propia

## 4. PROCEDIMIENTO Y RESULTADOS 4.1. SÍNTESIS GEOMÉTRICA DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS CON ELEVADA CAPACIDAD DE RESISTENCIA A LA PICADURA

Un análisis de algunas publicaciones dirigidas a la optimización de los engranajes cilíndricos con elevada resistencia a la picadura nos muestra que son diferentes las vías de abordar este problema. Por ejemplo, Zheng (2019) (Zheng, Zhang, Yao, & Tan, 2001), Zhou (2019) (Yuansheng, Shenghui, Liming, Jinyuan, & Zezhong C., 2019) y Karpuschewski (2017) (Karpuschewski, Beutner, Köchig, & Härtling, 2017) orientan el incremento de la resistencia a la picadura con mejoras en la herramienta de generación que es empleada en el tallado de los dientes. Por otro lado, Croccolo (2020) (Croccolo, De Agostinis, Olmi, & Vincenzi, 2020) y Sagralo (2019) (Sagraloff, Dobler, Tobie, Stahl, & Ostrowski, 2019) desarrollan mejoras en las condiciones de lubricación para aumentar la resistencia de los flancos de los dientes a la picadura. También son encontradas soluciones basadas en la optimización de la geometría de los engranajes como son los resultados de Langlois (2020) (Langlois & Al, 2020) con perfiles asimétricos, los desarrollos de nuevos engranajes de Azemi (2018) (Azemi, Mehmeti, & Maloku, 2018) con aplicación de técnicas CAD/CAE y con técnicas de optimización como las publicadas por el francés Mahiddini (2019) (Mahiddini, Chettibi, Benfriha, & Aoussat, 2019) que le permitieron aumentar la capacidad de resistencia a picadura de los engranajes mejorando la rigidez de unidades de ruedas cilíndricas engranadas. Aunque en menor medida, otros investigadores han realizado la búsqueda del diseño óptimo de los engranajes empleando otros procedimientos teóricos como el método de la primera derivada de la función objetivo (Chicurel, 1987) y el método del gradiente (Savage & 1993) o vías practicas mediante ensayos foto-elásticos y Prasanna, electromagnéticos (Drago, 1985).
### 4.1.1 Base del procedimiento para la síntesis racional de un engranaje cilíndrico con elevada resistencia a la picadura

En este trabajo, se presenta un procedimiento para el cálculo de la síntesis geométrica de engranajes cilíndricos de acero con dientes rectos mediante una organización de una evaluación de la función objetivo, orientada a maximizar el momento torsor aplicable al piñón con resistencia a picadura de los flancos de los dientes de las ruedas. Fueron empleados valores admisibles de los parámetros de diseño, que permiten comparar y retener en cada paso el valor extremo de la función a optimizar. Las ventajas que se le reconocen a este método, conocido como de búsqueda exhaustiva, son: sencilla organización de los cálculos y una buena flexibilidad ante modificaciones de la función objetivo.

El modelo matemático, basado en las formulaciones de la norma ANSI-AGMA 2101-D04 (Tabla 6 y Figura 20), sirvió como punto de partida para establecer la solución al problema de síntesis geométrica racional y definir la siguiente función objetivo (Ec. 4.1) a optimizar.

$$Mt_{1} = \left(\frac{\sigma_{H_{adm}}}{Z_{E}}\right)^{2} \cdot \frac{b \cdot d_{W1}^{2} \cdot Z_{I}}{2 \cdot K_{0} \cdot K_{V} \cdot K_{H} \cdot K_{S} \cdot Z_{R}} \quad (\text{Nmm}) \quad \text{Ec. 4.1}$$

Donde:

Mt1 = Momento torsor aplicable al piñón (Nmm)

 $\sigma_{H_{adm}}$  = Esfuerzo admisible de contacto (MPa).

 $Z_E$  = Factor de elasticidad (MPa<sup>1/2</sup>).

b = Ancho de engranaje (mm).

- dw1 = Diámetro primitivo del piñón (mm).
- Z<sub>I</sub> = Factor geométrico de resistencia a la picadura.
- $K_{\rm O}$  = Factor por aplicación de la carga.

- Kv = Factor por carga dinámica.
- K<sub>H</sub> = Factor por concentración de carga en el flanco del diente.
- $K_s$  = Factor por tamaño.
- $Z_R$  = Factor por rugosidad.

En el modelo matemático general, la ecuación Ec. 4.1 elimina la relación (R12) pues en la determinación de la geometría racional importa más evaluar el momento motriz en el piñón que la fuerza en los dientes conjugados. Entonces, la cantidad de relaciones involucradas en el modelo matemático general tendrá 26 relaciones.

#### 4.1.2. Variables conocidas y desconocidas

Para la ejecución del procedimiento de síntesis geométrica racional de un engranaje cilíndrico de dientes rectos con contacto exterior, a partir de las variables participantes en el modelo matemático general (Tabla 6), se determinaron cuáles serían las variables conocidas y las variables desconocidas.

En la Tabla 8 se muestran las variables asumidas como conocidas (datos) que se descartaron en el grafo del modelo matemático general y permitió desarrollar el procedimiento de cálculo como solución al problema de determinar la geometría racional de un engranaje cilíndrico de dientes rectos y ejes paralelos con contacto exterior y elevada resistencia a la picadura de los dientes. Tabla 8. Variables conocidas (datos) para solución del problema de la síntesis geométrica de engranajes cilíndricos de acero con dientes rectos.

No.	Variables	Unidad	Descripción:
1	U		Razón de engrane
2	Zı		Cantidad de dientes en el piñón
3	Сw	mm	Distancia entre ejes de las ruedas
4	m	mm	Módulo
5	b	mm	Ancho de engranaje
6	α (alfa)	0	Ángulo del perfil de cremallera de referencia
7	ha*		Factor de altura de la cabeza del diente
8	C*		Factor de holgura radial
9	Xı		Coeficiente de corrección en dientes del
			piñón
10	nı	min <sup>-1</sup>	Revoluciones por minuto del piñón
11	Eı	MPa	Módulo de elasticidad del material del piñón
12	v1 (miU1)		Coeficiente de Poisson del material del piñón
13	E <sub>2</sub>	MPa	Módulo de elasticidad del material de la
			rueda
14	v2 (miu2)		Coeficiente de Poisson del material de la rueda
15	σн (sigmaH).	MPa	Esfuerzo de contacto límite
16	Prop. no		Propiedades no uniformes del material.
	uniforme del		
	material		
17	Condición de		Condiciones de la superficie de contacto de
	superficie		los dientes

18	Máq. mov. y mot.	Régimen en máquina movida y motriz
19	Modif. generatriz flanco diente	Corrección en la generatriz del flanco de los dientes
20	Calidad del montaje	Calidad del ajuste en el montaje de las ruedas
21	S/S1	Relación geométrica en el montaje
22	Qiso	Grado de precisión del engranaje
23	A <sub>ma</sub>	Coeficiente A para calcular KH <sub>ma</sub>
24	B <sub>ma</sub>	Coeficiente B para calcular KH <sub>ma</sub>
25	Cma	Coeficiente C para calcular KH <sub>ma</sub>

Elaboración propia

En este caso, el problema tiene solución cuando la suma de la cantidad de variables conocidas (datos) y las relaciones entre las variables involucradas es igual a la cantidad de variables totales del problema. Es decir, cuando se cumple que:

#### V = D + R

Siendo:

V = Cantidad de variables del modelo matemático (51).

D = Cantidad de variables conocidas (25).

R = Cantidad de relaciones del modelo matemático (26).

V = 25 + 26 = 51 cantidad de variables del modelo matemático. Por lo tanto, el problema es soluble. En la Tabla 9 son mostradas las variables desconocidas en el problema y necesarias a calcular.

Tabla 9. Variables desconocidas para solución del problema de síntesis geométrica de engranajes cilíndricos de acero con dientes rectos.

No.	Variables	Unidad	Descripción:
1	Z2		Cantidad de dientes en la rueda
2	d <sub>w1</sub>	mm	Diámetro primitivo del piñón
3	d <sub>b1</sub>	mm	Diámetro básico del piñón
4	d <sub>a1</sub>	mm	Diámetro de cresta del piñón
5	d <sub>f2</sub>	mm	Diámetro de fondo de la rueda
6	X2		Coeficiente de corrección del perfil de dientes
			de la rueda
7	$x_{\Sigma}$ (xsuma)		Corrección sumaria
8	α <sub>w</sub> (alfaw)	0	Ángulo de engranaje en plano transversal
9	ρı (ro1)	mm	Radio del flanco de contacto en diente del
			piñón
10	ρ <sub>2</sub> (ro2)	mm	Radio del flanco de contacto en diente de la
			rueda
11	Mt1	Nmm	Momento torsor aplicable al piñón
12	ZE	MPa <sup>1/2</sup>	Factor de elasticidad
13	V	m/s	Velocidad tangencial en las ruedas
14	Kv		Factor por carga dinámica.
15	Кн		Factor por carga concentrada en flanco del
			diente
16	Zı		Factor geométrico de resistencia a la picadura.
17	В		Factor auxiliar de cálculo del Kv.
18	С		Factor auxiliar de cálculo del Kv.

19	KH <sub>pf</sub>	Factor por ancho relativo del piñón
20	KH <sub>ma</sub>	Factor por calidad de la manufactura
21	KH <sub>pm</sub>	Factor por ubicación del piñón
22	KH <sub>mc</sub>	Factor por modificación del flanco de diente
23	КН <sub>е</sub>	Factor por calidad del ajuste del montaje.
24	Ко	Factor por aplicación de carga
25	Ks	Factor por tamaño.
26	ZR	Factor por rugosidad.

Elaboración propia

# 4.1.3. Procedimiento de síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos con elevada capacidad de resistencia a la picadura

Aunque las condiciones iniciales pueden ser modificadas para analizar condiciones diferentes a las designadas en el procedimiento de cálculo empleado en este trabajo (ver ANSI-AGMA 2101-D04), en la solución de la síntesis racional geométrica del engranaje fue establecido que:

- a) Engranaje cilíndrico de acero con calidad comercial (MQ)<sup>1</sup>, de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior.
- b) Tratamiento térmico de normalizado con dureza volumétrica de 142 HB.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> El grado MQ representa los requisitos que pueden cumplir los fabricantes experimentados a un costo moderado, similar al AGMA Grade 2. MQ es también el grado de material predeterminado para la industria. engranajes. Usualmente la composición de estos aceros no se especifica y el método de fusión a menudo se desconoce, por lo que la línea MQ se colocó en los esfuerzos menores de contacto que pueden resistir los engranajes ensayados. (Ref. Norma ISO 6336-5 Calculation of load capacity of spur and helical gears — Part 5: Strength and quality of materials)



Figura 21. Comportamiento del esfuerzo de contacto límite para engranajes fabricados con aceros de bajo contenido de carbono y normalizados. (González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

- c) Condiciones de trabajo estable y sin perturbaciones considerables derivada de la maquina movida y motriz ( $K_0 = 1$ ).
- d) Tiempo de trabajo topado a no más de 8 horas diarias.
- e) Ubicación de las ruedas con disposición simétrica a los rodamientos  $(S_1/S = 0)$ .
- f) Engranaje protegido del ambiente por una carcasa cerrada (engranaje cerrado).
- g) Engranajes lubricados por inmersión en baño de aceite.
- h) Dientes sin modificación en los flancos ( $K_{Hmc} = 1$  sin abarrilamiento central),
- i) Engranaje de calidad comercial con grado 7mo de precisión ISO.
- j) Condiciones medias de rugosidad en los flancos ( $Z_R = 1$ ).
- k) Ruedas con asentamiento previo durante el montaje ( $K_{He} = 0.8$ ).
- Ruedas dentadas elaboradas por generación con parámetros de herramienta de corte y módulo normalizados según ISO.

En casos donde la aplicación del procedimiento para obtener la síntesis racional geométrica de un engranaje cilíndrico de acero de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior difiera de las declaradas anteriormente pueden ser empleadas las orientaciones brindadas en ANSI-AGMA 2101-D04 (reafirmada en marzo 16, 2016). Algunas de estas son:

#### Factor de sobrecarga, Ko.

El factor K<sub>o</sub> permite ajustar la fuerza nominal F<sub>t</sub>, para compensar los incrementos de la carga en el engranaje debido a fuerzas externas. Estas cargas externas dependen de las características de la máquina movida y la motriz, como también de las masas y rigidez del sistema, incluyendo los árboles y acoplamientos empleados.

Los factores de sobrecarga diferentes de la unidad solo se pueden establecer después de que se haya adquirido una experiencia de campo considerable en una aplicación particular.

Un factor de sobrecarga igual a uno ( $K_0 = 1$ ), puede ser considerado en un engranaje con la capacidad de sostener un número limitado de hasta un 200% de ciclos de sobrecarga momentánea (por lo general, menos de cuatro arranques en 8 horas, con un pico que no exceda un segundo de duración). Las sobrecargas momentáneas más altas o frecuentes se considerarán por separado.

Cuando no se dispone de los equipos necesarios o la experiencia en explotación suficiente puede ser empleada una solución más simple pero menos precisa para determinar el factor K<sub>o</sub>, basada en valores de orientación brindados en la Tabla 10.

Trabajo característico	Trabajo de la máquina motriz							
de la máquina movida	uniforme	choques	choques	choques				
		ligeros	moderados	fuertes				
uniforme	1,00	1,25	1,50	1,75				
choques ligeros	1,10	1,35	1,60	1,85				
choques moderados	1,25	1,50	1,75	2,00				
choques fuertes	1,50	1,75	2,00	2,25				

Tabla 10. Recomendación del factor de sobrecarga Kosegún ISO 6336-1

(International Organization for Standardization;, 2019).

#### Evaluación de S y S1.

Las definiciones de S y S1 pueden ser entendidas con facilidad mediante la Figura 22, donde:



Figura 22. Evaluación de S y S<sub>1</sub>. (Golubev, 1975)

- S, es el tramo entre cojinetes, o la distancia entre las líneas centrales de los cojinetes (mm).
- S1, es la distancia desde el centro del tramo entre cojinetes hasta la mitad del ancho del piñón (mm).

#### Coeficientes para evaluar el factor por calidad de la manufactura, KHma.

El factor por calidad de manufactura considera la desalineación de los ejes de rotación de los cilindros primitivos de las ruedas dentadas del engranaje por todas las causas ajenas a las deformaciones elásticas.

El valor del factor por calidad de manufactura se puede obtener de la Figura 23. Las cuatro curvas de la Figura 23 proporcionan valores representativos de *KHma* basados en el ancho de engranaje y en los efectos de la desalineación efectiva que se puede esperar para las cuatro clases de engranajes establecidos.



Figura 23. Factor por calidad de manufactura. (Reshetov, 1985)

Mediante una formulación matemática el factor por calidad de la manufactura puede ser estimado como:

$$K_{Hma} = A_{ma} + B_{ma} \cdot b + C_{ma} \cdot b^2 \qquad \text{Ec 4.2}$$

Los valores de los coeficientes en la Ecuación 4.2, para las cuatro curvas de la Figura 23, son definidas como:

Tabla 11. Calidad del Engranaje

Calidad del engranaje	A <sub>ma</sub>	B <sub>ma</sub>	C <sub>ma</sub>
Engranaje abierto	0,247	0,657 x 10⁻³	-1.186 x 10 <sup>-7</sup>
Engranaje cerrado y calidad comercial.	0,127	0,622 x 10 <sup>-3</sup>	-1.69 x 10 <sup>-7</sup>
Engranaje de precisión cerrado	0,0675	0,504 x 10 <sup>-3</sup>	-1.44 x 10 <sup>-7</sup>
Engranaje con elevada precisión y	0,0380	0,402 x 10 <sup>-3</sup>	-1.27 x 10 <sup>-7</sup>
cerrado			

Elaboración Propia

#### Factor por calidad del ajuste del montaje, K<sub>He</sub>.

El factor por calidad del ajuste del montaje se utiliza para modificar el factor de calidad de manufactura cuando las técnicas de fabricación o ensamblaje mejoran la alineación efectiva del engranaje. Se sugieren los siguientes valores para el factor por calidad del ajuste del montaje:

K<sub>He</sub> = 0,80 cuando el engranaje se ajusta en el montaje o cuando se mejora la compatibilidad de los engranajes mediante lapeado;

K<sub>He</sub> = 1.0 para todas las demás condiciones.

#### Factor por modificación del flanco de diente, KHmc

El factor por modificación de flanco del diente modifica la intensidad de las cargas picos cuando los dientes son generados con abarrilados o modificaciones en el perfil teórico.

KHmc = 1.0 para engranajes sin modificaciones de sus flancos;

KHmc = 0.8 para engranajes con modificaciones apropiadas en el perfil de los dientes.

#### Factor por rugosidad, Z<sub>R</sub>

El factor por rugosidad considera la calidad de la superficie del flanco del diente, del estrés residual y los efectos de plasticidad (endurecimiento por trabajo). Los factores de condición de la superficie estándar para los dientes de los engranajes aún no se han establecido para los casos en los que existe un efecto perjudicial del acabado de la superficie. En tales casos, se debe utilizar algún factor de acabado superficial mayor que la unidad.

El factor de condición de la superficie se puede tomar como la unidad siempre que se logre la condición de la superficie adecuada.

A continuación, la Figura 24 muestra el procedimiento de cálculo generado en el presente trabajo para la solución del problema asociado con la síntesis geométrica racional de un engranaje cilíndrico de dientes rectos con contacto exterior.



Figura 24. Procedimiento de cálculo. Primera etapa del procedimiento de cálculo correspondiente a la generación de las variables básicas (módulo, cantidad de dientes en las ruedas y coeficientes de corrección). Elaboración propia



Figura 24. (continuación) – Procedimiento de cálculo. Segunda etapa del procedimiento de cálculo correspondiente al completamiento de la geometría de las ruedas y exclusiones de las geometrías inadmisibles según espesor del diente, coeficiente de corrección e interferencia de los dientes. Elaboración propia



Figura 24. (continuación) – Procedimiento de cálculo. Tercera y última etapa del procedimiento de cálculo correspondiente al cálculo del momento torsor aplicable en el piñón por resistencia a la picadura y retención de los valores óptimos que maximizan la función objetivo (engranaje con síntesis racional). Elaboración propia

## 4.1.4. Resultados derivados de la aplicación del procedimiento de síntesis racional de la geometría de engranajes cilíndricos de dientes rectos

Con base al procedimiento desarrollado para calcular el momento torsor máximo que puede ser aplicado al piñón con resistencia a la picadura de los flancos activos de los dientes rectos de un engranaje cilíndrico con ejes paralelos y contacto exterior fue elaborado en Excel un procesamiento lineal del cálculo que permitió evaluar la influencia de algunos parámetros geométricos del engranaje en la magnitud del momento máximo permisible en el piñón.

En general, y tal como fue declarado anteriormente, las valoraciones del momento máximo permisible en el piñón fueron realizadas para engranajes lubricados por inmersión en baño de aceite, con disposición simétrica de las ruedas con relación a los apoyos, trabajando con carga uniforme y continua, no más de 8 horas diarias, con menos de 4 arranques en el intervalo de trabajo y evitando que la carga máxima de arranque supere el doble de la carga de trabajo nominal. El engranaje fabricado de acero de bajo carbono normalizado y dureza de 140 HB, esfuerzo admisible por contacto de  $\sigma_{Hadm} = 332$  MPa (según ISO 6336-5), seleccionado de calidad comercial (MQ), engranaje con grado 7mo de precisión ISO<sup>2</sup>, rugosidad superficial media de los flancos en los dientes menor de 6 µm (Ra ≤ 6µm) y sin asentamiento previo de las ruedas durante el montaje. Las ruedas dentadas fueron consideradas elaboradas por generación con parámetros normalizados de la herramienta de corte ( $\alpha = 20^{\circ}$ , ha<sup>\*</sup> = 1 y c<sup>\*</sup> = 0,25) y módulo normalizado según ISO.

### 4.1.5. Soluciones para engranajes con coeficientes de corrección igual a cero

Los engranajes básicos para el análisis fueron tipificados con distancia entre ejes (a<sub>w</sub>) de 60, 70, 80, 90, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400 y 500 mm, razones de engrane

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> ISO 1328- 1. Cylindrical Gears-ISO System of Accuracy. Part 1: Definition and Allowable Values of Deviations Relevant to Corresponding Flanks of Gear Teeth and ISO 1328-2. Cylindrical Gears-ISO System of Accuracy. Part 2: Definitions and Allowable Values of Deviations Relevant to Radial Composite Deviations and Runout Information.

(u) de 1, 2 y 4, con módulos de 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40 y 50 mm y ancho relativo a la distancia interaxial de  $\varphi_{BA} = 0.4$ .

Las soluciones para engranajes cilíndricos de acero de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior fueron aceptadas con distancia entre ejes y razones de engrane exactas, además de solo considerar los casos de engranaje tipificados como normales, es decir sin corrección del perfil en los flancos de evolvente, coincidentes con  $x_{\Sigma} = 0$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ . La Tabla 12 muestra parámetros geométricos obtenidos con la aplicación del procedimiento de síntesis racional de engranajes cilíndricos de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior en casos de engranajes normales, es decir con coeficientes de corrección igual a cero para el piñón (rueda menor motriz) y la rueda.

Durante la aplicación del procedimiento pudo ser corroborado que engranajes cilíndricos de dientes rectos con contacto exterior y ejes paralelos con ruedas normales ( $x_1 = x_2 = 0$ ) tienen limitaciones para cumplimentar algunas soluciones de geometría externa. En los casos analizados y mostrados en la Tabla 12, no fueron encontradas soluciones geométricas para engranajes con razón de cinemática igual a 2 y distancias interaxiales con valores que no sean múltiplos de 3. Este hecho ocurre cuando las combinaciones de módulo, distancia entre ejes de ruedas y razón de engranaje no permiten obtener un número entero de dientes con empleo de la ecuación 4.3.

$$z_{I} = \frac{2 \cdot a_{w}}{m(1+u_{I2})} \qquad \text{Ec 4.3}$$

Tabla 12. Soluciones de máxima capacidad de carga para engranajes cilíndricos
de acero de dientes rectos en casos de engranaje sin corrección del perfil en los
flancos de evolvente, coincidentes con $x_{\Sigma} = 0$ , $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ .

Сw	b	U12	m	Z۱	Sal	3	ρι	ρ2	ρred	Mt1
(mm)	(mm)		(mm)		(mm)		(mm)	(mm)	(mm)	(Nm)
60	24	1	1	60	0.79	1.78	9.9	10.68	5.1	8.6
60	24	2	1	40	0.76	1.77	6.4	14.1	4.4	5.0
60	24	4	1	24	0.72	1.73	3.5	17.0	2.9	1.9
70	28	1	1	70	0.79	1.81	11.7	12.3	6	14.5
70	28	2			Sin s	solució	on geon	nétrica	L	
70	28	4	1	28	0.73	1.75	4.3	19.7	3.5	3.1
80	32	1	1	80	0.80	1.83	13.4	13.9	6.8	20.0
80	32	2			Sin s	solució	on geon	nétrica	L	
80	32	4	1	32	0.74	1.77	5.0	22.4	4.1	4.7
90	36	1	1	90	0.80	1.84	15.2	15.6	7.8	28.3
90	36	2	1	60	0.79	1.83	9.9	20.8	6.7	16.6
90	36	4	1	36	0.75	1.79	5.7	25.1	4.6	6.8
100	40	1	1	100	0.81	1.85	16.9	17.3	8.5	38.5
100	40	2			Sin s	solució	on geon	nétrica		
100	40	4	1	40	0.76	1.80	6.4	27.8	5.2	9.3
125	50	1	1	125	0.81	1.87	21.2	21.6	10.7	73.9
125	50	2			Sin s	solució	on geon	nétrica		
125	50	4	1	50	0.78	1.83	8.2	34.6	6.6	18.2
160	64	1	1	160	0.82	1.90	27.2	27.5	13.7	151.4
160	64	2			Sin s	solució	on geon	nétrica		
160	64	4	1	64	0.79	1.86	10.6	44.1	8.6	37.9
200	80	1	1	200	0.82	1.91	34.1	34.3	17.1	288.3
200	80	2			Sin s	solució	on geon	nétrica		
200	80	4	1	40	0.80	1.88	13.4	55.0	10.8	72.9
250	100	1	1	250	0.83	1.92	42.6	42.9	21.4	546.6

Сw	b	<b>U</b> 12	m	Zı	Sal	3	ρι	ρ2	pred	Mt1			
(mm)	(mm)		(mm)		(mm)		(mm)	(mm)	(mm)	(Nm)			
250	100	2			Sins	solució	on geon	nétrica					
250	100	4	1	100	0.81	1.90	16.9	68.6	13.6	139.4			
315	126	1	1	315	0.83	1.94	53.8	53.9	26.9	1054.8			
315	126	2	1	210	0.83	1.93	35.8	71.9	23.9	634.2			
315	126	4	1	126	0.81	1.91	21.4	86.4	17.1	271.3			
400	160	1	1	400	0.83	1.94	68.3	68.5	34.2	2067.2			
400	160	2			Sins	solucić	on geon	nétrica					
400	160	4	1	160	0.82	1.93	27.2	109.6	21.8	535.7			
500	200	1	1	500	0.84	1.95	85.4	85.6	42.7	3847.6			
500	200	2		Sin solución geométrica									
500	200	4	1	200	0.82	1.94	34.1	136.9	27.3	1004.0			

Elaboración propia

Después de analizar los resultados de la Tabla 12, derivados de la aplicación del procedimiento de cálculo presentado en esta investigación, puede ser afirmado que la geométrica racional para máxima resistencia a la picadura, de un engranaje cilíndrico de dientes rectos con contacto exterior, ejes paralelos y ruedas normales ( $x_1 = x_2 = 0$ ), se logra con módulo pequeño y gran número de dientes en las ruedas. En la Tabla 12 puede verse que las soluciones de máxima resistencia a la picadura son para módulo m = 1.

La Figura 25 y la Tabla 13 muestran que la geometría racional con módulo pequeño y grandes números de dientes, para máxima resistencia a la picadura de los flancos activos de los engranajes analizados, puede explicarse con un aumento del radio de curvatura reducido en el contacto de los dientes. ( $p_{red}$ ). En efecto, un aumento del radio del radio de curvatura efectivo en el contacto de los dientes disminuye el esfuerzo de contacto (ver Ec. 3.1) y aumenta el momento torsor que puede ser aplicado al piñón debido a un incremento del factor geométrico de resistencia a la picadura  $Z_1$  (ver Ec. 4.1).



Figura 25. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia del módulo (m) y el radio de curvatura reducido (ρ) para engranajes con geometría reportada en la tabla 13. Elaboración propia

Tabla 13. Soluciones de máxima capacidad de carga para engranajes cilíndricos de dientes rectos de acero normalizado con dureza de 140 HB, con distancia interaxial de 315 mm, ancho de 126 mm y razón de engranaje de 2. Elaborados sin corrección del perfil en los flancos de evolvente ( $x_{\Sigma} = 0, x_1 = 0 y x_2 = 0$ ) y generados con fresa madre según *ISO 54-77*.

m	Z۱	3	ρι	ρ2	pred	M <sub>t1</sub>
(mm)			(mm)	(mm)	(mm)	(Nm)
1	210	1.93	35.8	71.9	23.90	634.5
1.25	168	1.92	35.7	72.0	23.85	633.7
1.5	140	1.91	35.6	72.1	23.82	633.1
2	105	1.89	35.5	72.2	23.80	631.6
2.5	84	1.87	35.3	72.4	23.70	629.8
3	70	1.85	35.1	72.7	23.60	627.6
5	42	1.77	33.9	73.9	23.20	616.2
6	35	1.75	33.1	74.6	22.90	608.9
10	21	1.65	29.5	78.2	21.40	569.1

Elaboración propia

Es importante recordar que el valor del radio de curvatura reducido es menor que el menor de los radios de curvatura de los flancos de los dientes en contactos (ver Ec. 3.2), por lo que mientras mayor es el radio de curvatura del flanco del piñón ( $\rho$ 1) mayor será el radio de curvatura efectivo (reducido) en el punto de contacto donde inicia la transmisión de carga un solo par de diente engranados (LPSTC) sobre la línea práctica de engranaje.

La síntesis geométrica racional de un engranaje cilíndrico de ruedas con coeficientes de corrección cero (x = 0), para garantizar mayor resistencia a la picadura, debe estar orientada al incremento de la curvatura de los flancos de los dientes de la rueda con menor cantidad de dientes (piñón) cuyos flancos activos presentan una menor curvatura del perfil de evolvente. Ver Figura 26.



Figura 26. Variación del flanco de dientes en ruedas con diferentes números de dientes. (González Rey G. , Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

La Figura 27 muestra como al aumentar el módulo y disminuir la cantidad de dientes en las ruedas engranadas crece el radio de curvatura del flanco del diente en contacto en el punto LPSTC de la rueda mayor y disminuye el radio de curvatura del flanco del diente en contacto en el referido punto de la rueda menor sobre la línea práctica de engranaje. Este efecto de reducción del radio de curvatura en el flanco del diente del piñón produce una disminución del radio de curvatura reducido en el contacto en el punto LPSTC que reduce a su vez la resistencia de los dientes del engranaje al deterioro por picadura.



Figura 27. Esquemas de ubicación del punto donde inicia la transmisión de carga un solo par de diente engranados (LPSTC) sobre la línea práctica de engranaje de ruedas con dientes rectos y distancia interaxial a<sub>w</sub> = 315 mm y razón de engranaje  $u_{12} = 2$ . A la izquierda, engranaje con módulo m = 1, piñón con 210 dientes y radio de curvatura de flancos en contacto  $\rho_1 = 35.8$  mm y  $\rho_2 = 71.9$  mm. A la derecha, engranaje con módulo m = 10, piñón con 21 dientes y radio de curvatura de los flancos en contacto  $\rho_1 = 29.5$  mm y  $\rho_2 = 78.4$  mm.

(González Rey G., Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

### 4.1.6. Soluciones para engranajes con coeficientes de corrección diferentes a cero

De igual manera que las soluciones para engranajes normales ( $x_1 = x_2 = 0$ ), durante el análisis de resultados fueron tipificados los engranajes básicos con coeficientes de corrección diferentes a cero ( $x_1 \neq 0$  y  $x_2 \neq 0$ ) con distancias entre ejes ( $a_w$ ) de 60, 70, 80, 90, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400 y 500 mm, razones de engrane ( $u_{12}$ ) de 1, 2 y 4, con módulos (m) de 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40 y 50 mm y ancho relativo a la distancia entre ejes de ruedas de  $\phi_{BA} = 0.4$ , pero con la posibilidad de aplicar diferentes valores de coeficientes de corrección de flanco con tolerancias de  $x_1 = \pm 0.1$  en valores positivos y negativos. Las soluciones para engranajes cilíndricos de acero de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior fueron aceptadas con distancias entre ejes y razones de engrane exactas. También fueron tomados en consideración el cumplimiento de los siguientes índices de calidad geométrica:

- a) El espesor de cresta del diente es mayor que el 30% del módulo ( $s_a \ge 0.3$  m).
- b) El coeficiente de recubrimiento es igual o mayor a 1.2 ( $\epsilon \ge 1.2$ ).
- c) No debe ocurrir interferencia en el contacto entre los dientes, es decir: el contacto entre los dientes del engranaje es realizado en partes donde el flanco activo de los dientes corresponde a una curva de evolvente y se establece sobre la línea práctica del engranaje.

La Tabla 14 muestra soluciones de síntesis racional con base en los parámetros geométricos externos e internos de engranajes cilíndricos de dientes rectos con ejes paralelos y contacto exterior en casos de engranajes con posibilidad de aplicar coeficientes de corrección del perfil, es decir con coeficientes de corrección diferentes a cero para el piñón (rueda menor motriz) y la rueda.

Tabla 14. Soluciones de máxima resistencia a picadura para engranajes cilíndricos
de acero de dientes rectos con corrección del perfil en los flancos de evolvente,
coincidentes con $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 \neq 0$ .

a <sub>w</sub> (mm	b (mm	U	m	<b>Z</b> 1	<b>Z</b> 2	<b>X</b> 1	X2	xΣ	Sai (m	a	թյ (mm	p2 (mm	ρ <sub>red</sub> (mm	Mt1 (Nm	Factor limitante
) 60	) 24	1	2.	23	23	1.	-	1.1	m) 0.33	1.23	) 13.	) 13.	) 6.5	) 10.5	Aauzad
			5	20	20	2	0.056	44	0100		08	00	010		0
		2	1.2	3	62	1.	0.0	1.5	0.3	1.	9.1	15.	5.8	6.3	Aguzad
			5	1		5	65	65	3	24	8	7			0
		4	1	24	96	0.	-0.9	0	0.3	1.	5.1	15.	3.9	2.6	Aguzad
						9			2	46	7	3			0
70	28	1	2.	2	27	1.	0.0	1.1	0.4	1.	14.	14.	7.4	16.2	Bajo ε
			5	7		1	25	25	3	3	78	83			
		2	1.	3	54	1.	0.3	1.8	0.3	1.	10.	19.	6.8	10.0	Bajo ε
			5	0		5	74	74	8	21	60	01			
		4	1.	2	88	1	0.0	1.0	0.3	1.	6.0	20.	4.7	4.1	Aguzad
			25	2			64	64	1	35	3	92			0
80	32	1	4	1	19	0.	0.0	0.7	0.5	1.	14.	21.	8.6	23.9	Bajo ε
				9		7	47	47	8	20	10	95			
		2	2	2	52	1.	-	1.0	0.3	1.	11.	20.	7.5	14.3	Aguzad
				6		2	0.1	89	1	31	88	17			0
							11								
		4	1.	2	10	1.	0.4	1.6	0.3	1.	7.0	24.	5.5	6.2	Aguzad
			25	5	0	2	26	26	4	28	9	7			0
90	36	1	2	4	43	1.	0.7	2.3	0.6	1.	19.	20.	9.9	34.8	Bajo ε
				3		6	05	05	1	20	24	38			
		2	2	2	58	1.	0.1	1.6	0.3	1.	13.	23.	8.7	20.9	Aguzad
				9		5	75	75	1	22	83	8			0
		4	1	3	14	1.	1.1	2.7	0.4	1.	8.1	28.	6.3	9.0	Bajo ε
				5	0	6	46	46	5	21	7	4			
100	40	1	2	4	48	1.	0.5	2.2	0.5	1.	21.	21.	10.	46.7	Interfere
				8		7	77	77	8	24	63	52	8		ncia
		2	1.	4	86	1.	0.7	2.5	0.5	1.	14.	26.	9.6	28.0	Máximo
			5	3		7	14	14		24	87	77			M†1

a <sub>w</sub> (mm )	b (mm )	U	m	Z 1	<b>Z</b> 2	<b>X</b> 1	Х <sub>2</sub>	xΣ	S <sub>a1</sub> (m m)	3	ρ <sub>1</sub> (mm )	ρ <sub>2</sub> (mm )	ρ <sub>red</sub> (mm )	Mt1 (Nm )	Factor limitante
		4	1	3	15	1.	0.9	2.7	0.3	1.	9.3	30.	7.2	12.5	Bajo ε
				9	6	8	23	23	7	20	6	71			
125	50	1	3	4	40	1.	0.3	1.8	0.5	1.	26.	26.	13.	89.5	Máximo
				0		5	98	98	4	25	98	96	5		Mt1
		2	3	2	54	1.	-	1.2	0.3	1.	18.	32.	11.	53.6	Aguzad
				7		3	0.01	83	1	28	81	08	8		0
							7								
		4	1.	3	15	1.	0.9	2.7	0.3	1.	11.	38.	9.0	24.0	Bajo ε
			25	9	6	8	23	23	7	20	70	39			
160	64	1	3	5	51	1.	1.2	2.6	0.8	1.	31.	38.	17.	184.	Bajo ε
				1		4	84	84	0	20	92	29	4	2	
		2	2	5	10	1.	0.2	2.1	0.4	1.	24.	39.	15.	109.	Interfere
				2	4	9	78	78	2	30	3	82	1	7	ncia
		4	1.	4	16	1.	0.1	1.7	0.3	1.	14.	46.	11.	48.5	Máximo
			5	2	8	6	61	61	4	34	73	06	2		M†1
200	80	1	6	3	32	1.	0.2	1.5	0.4	1.	42.	43.	21.	349.	Máximo
				2		3	18	18	8	26	92	39	6	1	Mt1
		2	3	4	86	1.	0.7	2.4	0.5	1.	29.	53.	19.	210.	Interfere
				3		7	14	14		24	74	55	1	5	ncia
		4	2	3	15	1.	0.9	2.7	0.3	1.	18.	61.	14.	94.5	Bajo ε
				9	6	8	23	23	7	20	72	42	4		
250	100	1	6	4	40	1.	0.3	1.8	0.5	1.	53.	53.	27.	662.	Máximo
				0		5	98	98	4	25	96	92	0	0	M†1
		2	6	2	54	1.	-	1.2	0.3	1.	37.	64.	23.	398.	Aguzad
				7		3	0.01	82	1	28	62	15	7	6	0
							8								
		4	2.	3	15	1.	0.9	2.7	0.3	1.	23.	76.	17.	179.	Bajo ε
			5	9	6	8	23	23	7	20	40	78	9	9	
315	126	1	10	3	30	1.	0.5	1.7	0.5	1.	64.	75.	34.	130	Bajo ε
				0		2	44	44	8	20	73	82	9	2.3	
		2	6	3	68	1.	0.0	1.6	0.3	1.	48.	79.	30.	781.	Aguzad
				4		6	52	52	1	25	84	77	7	0	0

a <sub>w</sub> (mm )	b (mm )	U	m	Z 1	<b>Z</b> 2	X1	Х <sub>2</sub>	xΣ	s <sub>a1</sub> (m m)	3	ρ <sub>1</sub> (mm )	ρ <sub>2</sub> (mm )	ρ <sub>red</sub> (mm )	Mt1 (Nm )	Factor limitante
		4	3	4	16	1.	0.9	2.7	0.3	1.	29.	96.	22.	347.	Interfere
				1	4	8	13	13	9	22	32	10	5	3	ncia
400	160	1	12	3	32	1.	0.2	1.5	0.4	1.	85.	86.	43.	250	Máximo
				2		3	18	18	8	26	83	77	1	3.7	Mt1
		2	6	4	86	1.	0.7	2.4	0.5	1.	59.	107	38.	151	Interfere
				3		7	14	14	0	24	49	.1	2	9.0	ncia
		4	4	3	15	1.	0.9	2.7	0.3	1.	37.	122	28.	687.	Bajo ε
				9	6	8	23	23	7	20	45	.8	7	7	
500	200	1	12	4	40	1.	0.3	1.8	0.5	1.	107	107	53.	466	Máximo
				0		5	98	98	4	25	.9	.8	9	0.0	Mt1
		2	12	2	54	1.	-	1.2	0.3	1.	75.	128	47.	282	Aguzad
				7		3	0.01	83	0	28	25	.3	4	4.6	0
							7								
		4	5	3	15	1.	0.9	2.7	0.3	1.	46.	153	35.	128	Bajo ε
				9	6	8	23	23	7	20	81	.6	9	7.1	

Elaboración propia

Las soluciones de síntesis racional para máxima resistencia a picadura de los flancos activos de los dientes rectos de engranajes fueron limitadas por las condiciones de bajo coeficiente de recubrimiento, dientes puntiagudos e interferencia en el contacto. Los resultados mostrados en la Tabla 14 indican que los valores máximos admisibles para aplicar en el piñón del engranaje y que indican el límite de la capacidad de resistencia a la picadura del engranaje, según las condiciones preliminarmente establecidas en el procedimiento de cálculo, dependen mayormente del valor limite elegido para el espesor de cresta de los dientes y del coeficiente de recubrimiento. Es decir, pueden ser obtenidas síntesis geométricas de engranajes con mayor capacidad de resistencia, pero deben aceptarse valores más bajos de los límites del espesor de cresta y coeficiente de recubrimiento que los declarados para la aplicación del procedimiento presentado en este trabajo.

Motivo del valor límite del MT1	Cantidad (%)
Bajo coeficiente de recubrimiento ( $\varepsilon$ < 1.2)	13 (36%)
Aguzado del diente del piñón (sa1 < 0.3)	11 (31%)
Interferencia	5 (14%)
Máximo momento Mt1	7 (19%)

Tabla 15. Motivos que limitaron el valor máximo del momento torsor en el piñón.

Elaboración propia

En general, se observa que la geometría racional con mayor radio de curvatura mejora la resistencia a la picadura de los flancos activos de los engranajes analizados. Al igual que en el caso de engranajes normales esto puede explicarse con un aumento del radio de curvatura reducido en el contacto de los dientes que disminuye el esfuerzo de contacto (ver Ec. 3.1) y aumenta el momento torsor que puede ser aplicado al piñón debido a un incremento del factor geométrico de resistencia a la picadura  $Z_1$  (ver Ec. 4.1). Ver Figuras 27, 28 y 29.



Figura 28. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (a<sub>w</sub>) y el radio de curvatura reducido (ρ<sub>red</sub>) de los flancos activos de los dientes en contacto para engranajes con razón de engranaje u<sub>12</sub> = 1 y geometría reportada en la tabla 14. Elaboración propia



Figura 29. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (a<sub>w</sub>) y el radio de curvatura reducido (ρ<sub>red</sub>) de los flancos activos de los dientes en contacto para engranajes con razón de engranaje u<sub>12</sub> = 2 y geometría reportada en la tabla 14. Elaboración propia



Figura 30. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (aw) y el radio de curvatura reducido (ρ<sub>red</sub>) de los flancos activos de los dientes en contacto para engranajes con razón de engranaje u<sub>12</sub> = 4 y geometría reportada en la tabla 14. Elaboración propia En general para engranajes con corrección y distancia entre ejes de ruedas mayores a 125 mm, las soluciones con mayores valores de módulo y distancia interaxial favorecen el incremento de la resistencia del engranaje a la picadura de sus dientes. Por otra parte, tamaños mayores del módulo y cantidades de dientes en el piñón alrededor de 35 (valor promedio en las soluciones racionales, ver Figura 30) aumentan los diámetros básicos de las ruedas y la curvatura de los flancos en los dientes del piñón. Todo esto se favorece, con la aplicación de los coeficientes de corrección positiva en el piñón que permite obtener flancos de dientes en las partes superiores de la curva de evolvente y lograr radios de curvatura mayores. Las Figuras 31, 32, 33 y 34 muestran esta tendencia.



Figura 31. Cantidad de dientes en el piñón en las soluciones de síntesis racional con resistencia a picadura de los dientes en ruedas con corrección. Elaboración propia



Figura 32. Soluciones de geometría racional para engranajes cilíndricos de dientes rectos de acero con coeficientes de corrección.

Elaboración propia



Figura 33. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (aw) y el módulo del engranaje (m) para engranajes con razón de engranaje u12 = 1 y geometría reportada en la tabla 14. Elaboración propia



Figura 34. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (a<sub>w</sub>) y el módulo del engranaje (m) para engranajes con razón de engranaje u<sub>12</sub> = 2 y geometría reportada en la tabla 14. Elaboración propia



Figura 35. Comportamiento del momento torsor admisible en el piñón (Mt1) con dependencia de la distancia interaxial del engranaje (aw) y el módulo del engranaje (m) para engranajes con razón de engranaje u<sub>12</sub> = 4 y geometría reportada en la tabla 14. Elaboración propia La Tabla 16 muestra las diferentes soluciones para un engranaje con corrección. En las referidas soluciones se observa que aumentos progresivos del módulo en combinaciones adecuadas de numero de dientes y corrección permiten obtener geometrías internas mejoradas para el engranaje. En este caso la mejor solución corresponde a m = 6 que fue limitada por aguzado de los dientes del piñón. Es importante destacar, que la solución racional para engranajes con corrección generalmente ocurre con coeficientes de corrección que generan ángulos de engranaje alrededor de 24°.

m (mm)	Zı	X1	α <sub>w</sub> (°)	3	թյ (mm)	թշ (mm)	ρ <sub>red</sub> (mm)	Mtı (Nm)	Limite
1	206	2.6	22.81	1.35	40.7	81.4	27.1	706.6	Interferencia
1.25	165	2.4	22.64	1.43	41.7	79.6	27.4	713.2	Interferencia
1.5	137	2.3	23.14	1.36	42.1	81.7	27.8	721.5	Interferencia
2	102	2.2	24.10	1.23	42.7	85.9	28.5	735.7	Interferencia
2.5	82	2	23.46	1.35	44.4	81.0	28.7	743.1	Interferencia
3	68	1.9	24.10	1.29	44.7	83.9	29.2	751.7	Interferencia
4	51	1.8	24.10	1.28	46.7	81.9	29.7	766.7	Interferencia
5	41	1.3	23.50	1.30	48.7	76.7	29.8	771.9	Aguzado
6	34	1.6	24.10	1.25	48.8	79.8	30.3	781.0	Aguzado
8	26	1.0	21.45	1.43	45.8	69.4	27.6	725.4	Aguzado
10	21	0.8	20.00	1.46	43.9	63.8	26.01	690.4	Aguzado
12	17	0.8	24.10	1.30	41.2	87.5	28.00	721.5	Aguzado

Tabla 16. Soluciones racionales para un engranaje con corrección con distancia interaxial de 315 mm, ancho de 126 mm y razón de engranaje de 2.

Elaboración propia

Finalmente, pudo ser corroborado que soluciones racionales con engranajes diseñados con aplicación de coeficientes de corrección mejoran su capacidad de resistencia a la picadura de los flancos activos en un valor promedio de 25.7% con relación a engranajes normales y permiten siempre soluciones geométricas para cualquier distancia interaxial. La Tabla 17 muestra esta afirmación.

Tabla 17. Comparación	del torque máximo	en piñón para	a engranajes	normales (x1
$= x_2 = 0$ ) y engranajes co	on corrección (x₁ ≠ 0	)).		

aw	b	U	Mt1 (Nm)	Mt1(Nm)	% de incremento de la
(mm)	(mm)		con x1=x2=0	con x1 ≠ 0	resistencia aplicando
					coeficientes de corrección.
60	24	1	8.6	10.5	22.1
		2	5.0	6.3	26
		4	1.9	2.6	36.8
70	28	1	14.5	16.2	11.7
		2		10.0	
		4	3.1	4.1	32.3
80	32	1	20.0	23.9	19.5
		2		14.3	
80	32	4	4.7	6.2	31.9
90	36	1	28.3	34.8	23
		2	16.6	20.9	25.9
		4	6.8	9.0	32.4
100	40	1	38.5	46.7	21.3
		2		28.0	
		4	9.3	12.5	34.4
125	50	1	73.9	89.5	21.1
		2		53.6	
		4	18.2	24.0	31.9
160	64	1	151.4	184.2	21.7
		2		109.7	
		4	37.9	48.5	28
200	80	1	288.3	349.1	21.1
		2		210.5	
		4	72.9	94.5	29.6
250	100	1	546.6	662.0	21.1
		2		398.6	
		4	139.4	179.9	29.1
315	126	1	1054.8	1302.3	23.5
		2	634.2	781.0	23.1
		4	271.3	347.3	28
400	160	1	2067.2	2503.7	21.1
		2		1519.0	
		4	535.7	687.7	28.4
500	200	1	3847.6	4660.0	21.1
		2		2824.6	
		4	1004.0	1287.1	28.2

Elaboración propia

### 4.2. VALIDACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE SÍNTESIS GEOMÉTRICA MEDIANTE COMPARACION DE RESULTADOS DERIVADOS DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Para la validación del procedimiento de síntesis geométrica presentado en este trabajo fue utilizada la herramienta de FEA (Análisis de Elemento Finito por sus siglas en inglés) proporcionada en el software Solidworks de Dassault Systemés.

Esta herramienta de análisis se basa en el método de Von Mises que se concentra en el límite elástico del material utilizado para calcular en una simulación si los esfuerzos presentes en los tres ejes principales (**x**, **y** y **z**) se aproximan a este y determinar si la estructura a estudiar soporta los esfuerzos aplicados.

Cuando un cuerpo que está en una posición de equilibrio sin deformaciones es sujeto a un esfuerzo, este presenta deformaciones hasta que llega a un nuevo estado de equilibrio deformado debido a estos esfuerzos generados y actuando sobre él. La relación existente entre los esfuerzos y la deformación presentada en un cuerpo se puede presentar en una gráfica que relaciona el Esfuerzo y la Deformación. Ver Figura 36.



Figura 36. Gráfica típica de esfuerzo-deformación para materiales dúctiles. (Dobrovolski, 1991)

La tensión de Von Mises es un criterio de fluencia, ampliamente utilizado para metales dúctiles mayormente y establece que se producirá una fluencia en un cuerpo si los componentes de tensión que actúan sobre él son mayores que el criterio aceptado como límite por fluencia (Armenakas, 2006).

Desde los primeros trabajos de Hertz, Lewis (Lewis, 1892) y Blok (Blok, 1937), que son base de los actuales criterios de comprobación de la resistencia de los dientes a la picadura, la fractura y el desgaste adhesivo, las mejoras de los procedimientos de cálculo y los modelos de análisis han sido los objetivos fundamentales de numerosas investigaciones en la ingeniería de engranajes.

El método de elementos finitos para analizar los fenómenos de contacto ha sido empleado para modelar los esfuerzos de contacto y huellas del contacto entre dientes de engranajes metálicos (Poller & Váradi, 1988) y no metálicos (Tessema, Walton, & Weale, 1995). Un aspecto importante en la valoración de la rigidez de los dientes y por consiguiente el reparto de la carga ha promovido la modelación del contacto entre dientes del engranaje. Por este motivo, uno de los usos más frecuentes del método de los elementos finitos en el estudio de los engranajes ha estado dirigido a la simulación del proceso de engrane entre ruedas dentadas y en particular al análisis del contacto entre los flancos activo de los dientes engranados de las ruedas que trasmiten la potencia mecánica.

Como es conocido, la capacidad de trabajo de un engranaje se caracteriza por su resistencia mecánica a los esfuerzos producidos por las cargas actuantes. Dentro de estos esfuerzos, tienen marcada importancia los esfuerzos de contacto en los flancos activos de los dientes y los esfuerzos generados en la base de los dientes. Muchas decisiones de diseño óptimo estiman la necesidad de lograr una máxima capacidad de resistencia mecánica con una reducción del tamaño y peso de las ruedas.

Teniendo en cuenta lo anterior y tomando como base la herramienta FEA el siguiente paso es la modelación de perfiles de diente correspondiente a
engranajes que fueron objetos de estudio en la implementación del procedimiento de síntesis geométrica y realizar un análisis que permita valorar una coincidencia en el engranaje con mayor resistencia a la picadura según el procedimiento y según el análisis FEA. Para lograr esta validación, inicialmente deben ser generados los puntos típicos del perfil de los dientes para después modelar el trazado de las curvas correspondientes a los flancos de los dientes.

Para el trazado del perfil de los dientes, en el presente trabajo, se utilizó el procedimiento presentado por G. Rey (González Rey, García Martín, & Frechilla Fernández, Modelo matemático y procedimiento para la generación gráfica de los contornos de dientes de engranajes cilíndricos, 2006), el cual se basa en la generación de puntos en coordenadas que trazan el perfil del diente basándose en las formulaciones paramétricas de las curvas de evolvente y de trocoide presentadas por Henriot (Georges, 1999), estos, en un programa de modelado 3D se van uniendo con una curva que permite una unión correcta entre ellos respetando las tangencialidades y los radios de curvatura de los flancos de los dientes.

Para obtener las coordenadas de los puntos que conforman la curva del perfil del diente se realizan los cálculos para obtener un mínimo de 10 puntos y así lograr una mayor definición del perfil.

Con la herramienta FEA, fueron analizados 7 engranajes de los mostrados en la tabla 16 y correspondientes con engranajes de igual distancia entre ejes de ruedas y ancho relativo a la distancia interaxial pero con diferentes módulos que permiten apreciar la tendencia de las soluciones durante el proceso de síntesis racional. Observar, que, en ese análisis, la tabla 16 muestra la solución racional con módulo m = 6. Los engranajes seleccionados para ser analizados con la herramienta FEA son mostrados en la tabla 18.

Tabla 18. Valores de los engranajes a modelar para el análisis FEA. Distancia entre ejes  $a_w$ = 315 mm, ancho de engranaje  $b_w$ = 126 mm; razón de engranaje  $u_{12}$  = 2, ángulo de hélice en los dientes  $\beta$ = 0°;; factor de altura de la cabeza de cuchilla ha\* =1; factor de holgura radial c\*= 0.25; factor de radio de fondo del diente  $\rho_f$ \*= 0.25.

Engranaje	m (mm)	Z1	Z2	x1	թ1 (mm)	ρ2 (mm)	Mt1 (Nm)
1	3	68	136	1.9	44.7	83.9	751.7
2	4	51	102	1.8	46.7	81.9	766.7
3	5	41	82	1.3	48.7	76.7	771.9
4	6	34	68	1.6	48.8	79.8	781.0
5	8	26	52	1.0	45.8	69.4	725.4
6	10	21	42	0.8	43.9	63.8	690.4
7	12	17	34	0.8	41.2	87.5	721.5

Elaboración propia

Para el procedimiento del cálculo de los puntos de la curva de evolvente<sup>3</sup> y la curva de trocoide<sup>4</sup> se diseñó un algoritmo en Excel que otorga las coordenadas "x" y "y" de cada uno de los puntos de las curvas en el perfil de los dientes. Las coordenadas generadas se ingresaron a un sistema de ecuaciones en el software de Solidworks y se unen con la herramienta de "Spline" para así obtener los perfiles

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Curva generada por la trayectoria de un punto sobre una recta que se mueve con rodadura sin deslizar sobre una circunferencia. Esta curva es la base del perfil de evolvente en el flaco del diente y correspondiente con la zona de contacto entre dientes.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Curva generada por la trayectoria de un punto sobre una recta que se mueve con rodadura sin deslizar sobre una circunferencia. Esta curva es la base del perfil de evolvente en el flaco del diente y correspondiente con la zona de contacto entre dientes.

de uno de los dientes (ver Figura 37), a partir de este diente se genera una matriz repetitiva, asignando el número de dientes determinado para cada modelo, lo que genera un dibujo 2D, posteriormente con este modelo se procede a asignarle la anchura especificada generando así un modelo solido 3D (figura 5.3).



Figura 37. Modelo 2D generado por la unión de puntos calculados. Elaboración propia



Figura 38. Modelo 3D diseñado con los valores generados. Elaboración propia

Este procedimiento se realiza con cada uno de los datos de la tabla 18, tanto para la rueda como para el piñón. A continuación, en la Figura 5.4 se presentan los perfiles de diente generados para cada uno de los datos de engranes.



Elaboración propia.

La generación de estos perfiles, la generación de la matriz y su posterior cuerpo 3D permitió realizar el ensamble correspondiente de piñón y rueda, colocarlos de manera que el análisis del contacto con FEA se ejecutara cuando solo un par de dientes iniciaba la transmisión del movimiento.

El proceso de análisis fue realizado a partir de la generación de un ensamble compuesto de dos ejes en los que se montan tanto la rueda mayor como el piñón correspondiente a cada modelo y análisis.

Las relaciones asignadas en el ensamblaje son definidas con una coincidencia en los ejes temporales verticales, paralelismo en los ejes horizontales temporales y una distancia entre los centros de los mismos ejes correspondiente a 315 mm. Ver Figura 40.



Figura 40. Distancia entre centros de ruedas igual a 315 mm. Elaboración propia.

Definida la posición entre los ejes de rotación se procede a colocar la rueda mayor y el piñón en una relación de concentricidad con su eje respectivo. Partiendo de esta posición se asigna una relación de tangencia entre los dientes participantes en el análisis de contacto. Ver figura 41.



Figura 41. Relaciones para el análisis de contacto. (González Rey G. , Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos, 2005)

Completadas las relaciones de posición se procede a realizar el análisis FEA tomando en cuenta los siguientes parámetros:

Conexiones:

- Conjunto de contactos sin penetración
- Contacto nodo a superficie entre las caras tangentes de los dientes a analizar

Sujeciones:

 Se coloca una sujeción fija en el centro del engranaje y una sujeción tipo bisagra fija en el piñón para permitir el movimiento rotacional. Cargas:

 Se asigna una carga torsional en el eje del piñón con un valor de 781 Nm (Observar en tabla 18, que este valor corresponde con la carga máxima que puede ser aplicada en el engranaje con síntesis racional, de manera que el engranaje con módulo m = 6 debe tener el menor esfuerzo de contacto).

Malla:

• Se realiza un control de maya en las caras de los dientes en contacto considerando una malla fina.

Para el punto de contacto y con la finalidad de tener un estudio estandarizado se colocan los modelos en un avance angular de 3°.

Módulo elástico 2.05e+11 N/m<sup>2</sup> Coeficiente de Poisson 0.29 N/D Límite de tracción 38500000 N/m<sup>2</sup> Límite elástico 32500000 N/m<sup>2</sup> Coeficiente de expansión térmica 1.2e-05/K Densidad de masa 7870 kg/m<sup>3</sup>

El método de análisis se centra en la determinación del esfuerzo presente en el perfil de diente a una profundidad menor a 1 mm donde se ubica los esfuerzos de contacto causantes de picadura.

A continuación, se presentan los resultados de los análisis a los diferentes modelos de engranajes con la herramienta FEA. Ver Figuras 42 – 48



Figura 42. Esfuerzos de contacto para 68 dientes en piñón, módulo 3. Elaboración propia.



Figura 43. Esfuerzos de contacto para 51 dientes en piñón, módulo 4. Elaboración propia.



Figura 44. Esfuerzos de contacto para 41 dientes en piñón, módulo 5. Elaboración propia.



Figura 45. Esfuerzos de contacto para 34 dientes en piñón, módulo 6. Elaboración propia.



Figura 46. Esfuerzos de contacto para 26 dientes en piñón, módulo 8. Elaboración propia.



Figura 47. Esfuerzos de contacto para 21 dientes en piñón, módulo 10. Elaboración propia.



Figura 48. Esfuerzos de contacto para 17 dientes en piñón, módulo 12. Elaboración propia.

Los valores de esfuerzos máximos obtenidos en el análisis FEA aplicado a los modelos generados son mostrados en la Tabla 19.

m (mm)	zl	x1	Angulo de rotación	Momento de torsión aplicado Mt1 (Nm)	Esfuerzo máximo de contacto (MPa)
3	68	1.9	3°	781	710.1
4	51	1.8	3°	781	627.1
5	41	1.3	3°	781	437.2
6	34	1.6	3°	781	285.9
8	26	1.0	3°	781	308.0
10	21	0.8	3°	781	323.1
12	17	0.8	3°	781	360.2

Tabla 19. Tabla de resultados de esfuerzos máximos de contacto.

Elaboración propia

Finalmente, para verificar la solución de síntesis racional, se localiza en los valores obtenidos de esfuerzos máximos de contacto, la geometría de engranaje que presente el menor esfuerzo de contacto con el mismo momento torsor aplicado. La tabla 20 muestra la síntesis geométrica racional por resistencia a la picadura del engranaje analizado correspondiente a distancia interaxial de 315 mm, ancho de engranaje de 126 mm y razón de engranaje igual a 2.

m (mm)	zl	xl	Angulo de rotación	Tamaño de malla (mm)	Estuerzo de torsión aplicado Mt1 (Nm)	Esfuerzo de contacto (N/mm²)
6	34	1.6	3°	3	781	285

Tabla 20. Solución de síntesis geométrica racional obtenida con FEA.

Elaboración propia.

La figura 49 muestra los esfuerzos de contacto en engranajes con geometría reportada en la tabla 19 y corrobora que el menor esfuerzo de contacto y por consiguiente la mayor resistencia a la picadura se observa en el engranaje con módulo 6.



Figura 49. Esfuerzos de contacto obtenidos con MEF en engranajes con geometría reportada en tabla 16 y momento torsor en piñón de Mt1 = 781 Nm. Elaboración propia.

Finalmente, se corrobora que el engranaje de acero con dientes rectos analizado con distancia interaxial de 315 mm, ancho de engrane de 126 mm y razón de engranaje de 2, logra su geometría racional para mayor resistencia al deterioro por picadura con los siguientes parámetros básicos de las ruedas dentadas:

Modulo m = 6,

Cantidad de dientes en piñón z1= 34,

Cantidad de dientes en rueda  $z_2 = 68$ ,

Coeficiente de corrección en piñón x1 = 1.600

Coeficiente de corrección en rueda x<sub>2</sub> = 0.052

Durante el desarrollo de este estudio pudo ser corroborado que los resultados de la síntesis geométrica racional derivados del procedimiento presentado fueron validados mediante los modelos de elementos finitos (MEF) ejecutados. Las ruedas dentadas engranadas y modeladas mediante MEF con mayor capacidad de resistencia a la picadura (menor esfuerzo de contacto) reportaron coincidencia con la geometría de los engranajes con síntesis geométrica racional obtenida con el procedimiento presentado en esta investigación.

### CONCLUSIONES

Se desarrollo un procedimiento analítico para estimar el máximo valor de momento torsor aplicable en el piñón en condiciones de resistencia a la picadura para engranajes cilíndricos de ejes paralelos con contacto exterior y dientes rectos mediante un modelo matemático basado en formulaciones de AGMA 2101-D04 (AGMA, 2010). El procedimiento fue ejecutado en Excel y los resultados derivados del cálculo permitieron en primera instancia corroborar la convergencia de los resultados con otros declarados en la literatura especializada y posteriormente evaluar la influencia de algunos parámetros geométricos del engranaje en la magnitud del esfuerzo.

Se pudo afirmar que para obtener engranajes con mayor resistencia al deterioro por picadura sus ruedas deben ser diseñadas con dientes perfilados con radios de curvatura aumentados en la zona de contacto efectivo.

Derivados de los resultados obtenidos se concluye que, para engranajes normales (con coeficiente de corrección nulo) el uso de ruedas con módulos superiores disminuye la resistencia a la picadura de los dientes en casos de engranajes con distancia entre ejes establecidas, debido a que disminuye el factor geométrico de resistencia a la picadura por obtenerse menores radios efectivos de curvatura.

Engranajes con coeficientes de corrección positivos favorecen el aumento del radio de curvatura de los flancos de los dientes y resultan con mayores radios efectivos de curvatura. En los casos analizados, fueron obtenidos reducciones del esfuerzo de contacto del orden del 60% con variaciones del coeficiente de corrección en el piñón entre  $x_1 = -1$  y  $x_1 = 1$ .

Se observó en engranajes con distancias interaxiales definidas y síntesis geométrica racional una tendencia a lograr los máximos aumentos de resistencia a la picadura con cantidad de dientes en el piñón alrededor de 35 y ángulos de engranaje de 24°.

También, se verifico que soluciones racionales de engranajes con aplicación de coeficientes de corrección mejoran alrededor del 26% su resistencia a la picadura con relación a engranajes normales. Estos resultados, corroboran lo declarado por Niemann (Niemann & Winter, 2003) para engranajes con 18 y 54 dientes que reportaron 30% de incremento de la resistencia a la picadura con respecto a engranajes normales.

### RECOMENDACIONES

Dentro de un proyecto tan amplio como lo fue este, siempre se desea que exista una mejora constante del mismo, por lo que se recomienda a futuros investigadores en temas de Ingeniería de Engranajes el desarrollo de un procedimiento para la evaluación de los esfuerzos a la fractura y así poder responder con mayor amplitud sobre la capacidad de trabajo de engranajes racionales.

# **APORTACIÓN DE LA TESIS**

Un análisis de resultados demuestra la importancia de la geometría interna del engranaje en la magnitud de los esfuerzos de contacto. En particular, tiene gran importancia el radio de curvatura equivalente en la zona de contacto entre los flancos conjugados de los dientes de las ruedas, el módulo, la cantidad de dientes de las ruedas y el coeficiente de corrección de flancos. Los resultados obtenidos evidencian la importancia de lograr dientes con radios de curvatura aumentados en la zona de engrane efectivo para obtener engranajes con mayor resistencia al deterioro por picadura. Se desarrolló un procedimiento analítico para estimar el máximo valor de momento torsor aplicable en el piñón y obtener su síntesis geométrica racional en condiciones de resistencia a la picadura para engranajes cilíndricos de acero de ejes paralelos con contacto exterior y dientes rectos mediante un modelo matemático basado en formulaciones de AGMA 2101-D04. La utilización de este procedimiento con fundamentación y rigor científico aporta el conocimiento para el diseño óptimo de engranajes para máxima resistencia a la picadura bajo los parámetros mencionados. Contrario a lo que pueda ser supuesto sin un análisis previo de la influencia de los parámetros geométricos del engranaje en los esfuerzos de contacto, este estudio muestra que el uso de ruedas sin corrección con módulos superiores disminuye la resistencia a la picadura de los dientes en casos de engranajes con distancia entre ejes establecidas, debido a que disminuye el factor geométrico de resistencia a la picadura y por consiguiente, se obtienen también menores radios efectivos de curvatura resultante.

## **APORTACIÓN SOCIAL DE LA TESIS**

El trabajo presentado en este documento brinda la oportunidad a los diseñadores e interesados en el diseño de engranajes de tener un procedimiento que les permita, de primera instancia, obtener la geometría racional de un engranaje con la máxima resistencia a los esfuerzos de picadura, partiendo de esto también se tiene la oportunidad de evaluar, con esta herramienta, diseños o modelos con lo que ya se cuenten y determinar si se encuentran dentro de la geometría más efectiva o implementar una reevaluación de un diseño más efectivo bajo la condición de resistencia a la picadura. También se aporta el conocimiento exploratorio que permite a cualquier persona, interesada en este tema, el explorar un camino de análisis que le permita conocer más sobre el tema y que la información aquí contenida le pueda ayudar al desarrollo de algún tipo de investigación en Ingeniería de Engranajes.

### REFERENCIAS

- American Gear Manufacturers Association. (1999). Tooth proportions fot fine-pitch spur and helical gearing. AGMA 1003-G93. Virginia, USA.
- American Gear Manufacturers Association;. (2003). Rating the pitting resistance and bending strength of generated straight bevel, zerol bevel and spiral bevel gear teeth. ANSI/AGMA 2003-B97. Virginia, USA.
- American Gear Manufacturers Association;. (2011). Gear nomenclature, definitions of terms with symbols. ANSI/AGMA 1012-G05. Virginia, USA.
- American Gear Manufacturers Association;. (2012). Design recommendations for bvel gars. AGMA ISO standard 22849-A12. Virginia, USA.
- American Gear Manufacturers Association;. (2016). Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth. ANSI/AGMA 2101-D04. Virginia, USA.
- American Gear Manufacturers Association;. (2016). Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical hear teeth. ANSI/AGMA 2101-D04. Virginia, USA.
- American Gear Manufacturers Association;. (2016). Standard for design and specification of gearboxes for wind turbines. ANSI/AGMA/AWEA 6006-A03. Virginia, USA.
- Armenakas, A. E. (2006). Advanced mechanics of materials and applied elasticity. Boca Raton, USA: Taylor and Francis.
- Azemi, F., Mehmeti, X., & Maloku, B. (2018). The importance of CAD/CAE systems in development of product design and process of optimization. UBT International Conference, (p. 10 p.). Retrieved from https://knowledgecenter.ubtuni.net/cgi/viewcontent.cgi?article=1966&context=conference
- Baranov, G. (1979). Curso de la teoría de mecanismos y máquinas. Moscu: MIR.
- Benitez Hernández, L. (1985). Las fallas en los engranajes. Ingenieria Mecánica, Ingeniería e investigación(12), 40-52. Retrieved from https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4902861
- Blok, H. (1937). Measurement of temperature flashes on gear teeth under extreme pressure conditions. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 2, 14-20.
- Chicurel, E. (1987). Helical gear optimization by the Johnson Method. 7th World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms. Sevilla, España.

- Croccolo, D., De Agostinis, M., Olmi, G., & Vincenzi, N. (2020). A practical approach to gear design and lubrication. *Lubricants, 8*(9), 84. Retrieved from https://doi.org/10.3390/lubricants8090084
- Dobrovolski, V. (1991). Elementos de máquinas. Moscú: MIR.
- Drago, R. (1985). Design guidelines for high-capacity bevel gear systems. SAE Transactions, 94(5), 860-876. Retrieved from https://www.jstor.org/stable/44724083
- Georges, H. (1999). Traité théorique et practique des engranajes. Paris: DUNOD.
- Golubev, Y. (1975). Teoría de máquinas y mecanismos. Habana: Universidad de La Habana, Instituto de Economía.
- González Rey, G. (2005). Apuntes sobre geometría de engranajes cilíndricos. Ciudad de la Habana, Cuba.
- González Rey, G. (2009). Higher contact ratios for quieter gears. Gear Solutions, 7(jan), 20-27. Retrieved from https://gearsolutions.com/features/higher-contact-ratios-for-quieter-gears/
- González Rey, G., Fernández, F., & García Martín, J. (2006). Cylindrical gear conversions: ISO to AGMA. Gear Solutions, 16(3), 22-29. Retrieved from https://gearsolutions.com/features/cylindrical-gear-conversions-agma-toiso/
- González Rey, G., García Martín, R., & Frechilla Fernández, P. (2006). Modelo matemático y procedimiento para la generación gráfica de los contornos de dientes de engranajes cilíndricos. *Ingeniería Mecánica*, 9(1 (ene-abr)), 35-46. Retrieved from https://ingenieriamecanica.cujae.edu.cu/index.php/revistaim/article/view/ 147
- Gopichand, A., Sharma, K., Kumar, P., Sainath, K., & Aravind, I. (2012). Design of spur gear and its tooth profile. *Journal of Engineering Research and Applications*, 2(2), 820-827. Retrieved from https://www.ijera.com/papers/Vol2\_issue2/El22820827.pdf
- International Organization for Standardization. (1982). Addendum modification of teeth of cyindrical gears for speed-reducing and speed increasing gear pairs.
- International Organization for Standardization;. (2008). Calculation of load capacity of spur and helical gears. Part 2: Calculation of surface durability (pitting). BS ISO 6336-2. Génova, Italia.
- International Organization for Standardization;. (2019). Calculation of load capacity of spur and helical gears. Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors. 6336-1:2019. Génova, Italia.

- Karpuschewski, B., Beutner, M., Köchig, M., & Härtling, C. (2017). Influence of the tool profile on the wear behaviour in gear hobbing. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 18, 128-134. doi:https://doi.org/10.1016/j.cirpj.2016.11.002
- Langlois, P., & Al, B. (2020). Asymmetric cylindrical gears. JSAE Annual Congress (Spring) (pp. 1-7). Japón: SAE. Retrieved from https://www.smartmt.com/wp-content/uploads/Asymmetric-Cylindrical-Gears\_JSAE-Annual-Congress-May-2020.pdf
- Lewis, W. (1892). Investigation of the strength of gearteeth. Gear Technology(nov.dec.), 19-23. Retrieved from https://www.geartechnology.com/issues/1192x/lewis.pdf
- Linke, H., Börner, J., & Heß, R. (2016). Cylindrical gears. Munich: Hanser.
- MAAG Gear Company;. (1990). MAAG gear book. Zurich, Suiza.
- Mahiddini, B., Chettibi, T., Benfriha, K., & Aoussat, A. (2019). Optimum design of a spur gear using a two level optimization approach. *Design and Optimization* of Mechanical Systems, 25(4), 304-312. doi:https://doi.org/10.5755/j01.mech.25.4.18994
- McVittie, D. (1993, jul-aug). The european rack shift coefficient "x" for americans. Gear Technology, 34-36. Retrieved from https://www.geartechnology.com/issues/0793x/mcvittie.pdf
- Mott, R. L., Vavrek, E. M., & Wang, J. (2018). Machine elements in mechanical design (6 ed.). New York: Pearson.
- Niemann, G., & Winter, H. (2003). Maschinenelemente: Band 2: getriebe allgemein, zahnradgetriebe, grundlagen, stirnradgetriebe. Berlin: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-662-11873-3
- Pedrero, J. I., Artés, M., Pleguezuelos, M., García Masiá, C., & Fuentes, A. (1999). Theoretical model for load distribution on cylindrical gears: application to contact stress analysis. Virginia, USA: American Gear Manufacturers Association.
- Poller, R., & Váradi, K. (1988). Analysis of the geometrical condition of contact. Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, 1(32), 37-49. Retrieved from https://pp.bme.hu/me/article/view/5664
- Qiang, S., Yuehai, S., & Lun, L. (2018). Strength analysis and tooth shape optimization for involute gear with a few teeth. Advances in Mechanical Engineering, 10(1), 1-11. doi:https://doi.org/10.1177/1687814017751957
- Radzevich, S. P. (2016). Dudley's handbook of practical gear design (3 ed.). Taylor & Francis.

Research, Verified Market. (2021, Jun 25). By technology, Globla gear technology market. Retrieved from verifiedmarketresearch.com: https://www.verifiedmarketresearch.com/product/gear-technologymarket/

Reshetov, D. (1985). Elementos de máquinas. Moscú: CEAC.

- Rockwell, P. (2001). Profile shift in external parallel axis cylindrical involute gears. Gear Techonology(nov-dec). Retrieved from https://www.geartechnology.com/articles/1101/Profile\_Shift\_in\_External\_Par allel\_Axis\_Cylindrical\_Involute\_Gears/
- Sagraloff, N., Dobler, A., Tobie, T., Stahl, K., & Ostrowski, J. (2019). Development of an oil free water-based lubricant for gear applications. *Lubricants*, 7(4), 33. doi:https://doi.org/10.3390/lubricants7040033
- Savage, M., & Prasanna, M. (1993). Maximum life spiral bevel reduction design. Gear Technology, 10(5), 24-40. Retrieved from https://www.geartechnology.com/articles/0993/Maximum\_Life\_Spiral\_Bevel \_Reduction\_Design\_/
- Tessema, A., Walton, D., & Weale, D. (1995). Effect of web & flange thickness on nonmetallic gear performance. *Gear Technology*, 12(6), 30-35. Retrieved from https://www.geartechnology.com/issues/1195x/tessema.pdf

Verma R.G., M. A. (2012). Optimization of Helical Gear Design Using Genetic Algorithm. *Invertis Journal of Science & Technology, 5*(1), 192-199. Retrieved from https://www.indianjournals.com/ijor.aspx?target=ijor:ijst1&volume=5&issue= 4&article=002

- Wink, C. H., & Mantri, N. S. (2013). Gear design optimization for low contact temperature of a high speed, non lubricated spur gear pair. Gear Technology, 11 (may), 60-63. Retrieved from https://www.geartechnology.com/articles/0513/Gear\_Design\_Optimization \_for\_Low\_Contact\_Temperature\_of\_a\_High\_Speed,\_Non\_Lubricated\_Spur\_ Gear\_Pair/
- Yuansheng, Z., Shenghui, W., Liming, W., Jinyuan, T., & Zezhong C., C. (2019). CNC milling of face gears with a novel geometric analysis. *Mechanism and Machine Theory, 139*(september), 46-65. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X19303489
- Zheng, F., Zhang, J., Yao, L., & Tan, R. (2001). Investigation on the wear of spur gears generated by modified cutter. *Friction*, 9(2), 288-300. Retrieved from https://link.springer.com/article/10.1007/s40544-019-0337-8