CIATEQ, A. C. Centro de Tecnología Avanzada
Dirección de Posgrado

Optimización CAE de un miembro estructural automotriz con estructuras porosas (lattice) utilizando Optistruct

TESIS QUE PRESENTA

Ing. Richard Esteban Morales Rubí
Asesor: Dr. Hugo Arcos Gutiérrez

Para obtener el grado de

Maestro en
Manufactura Avanzada

Toluca, Estado de México
agosto, 2021

CARTA DE LIBERACIÓN DEL ASESOR

Lerma, Estado de México, 23 de junio del 2021.

Mtro. Geovany González Carlos
Coordinador Académico de Posgrado
CIATEQ, A.C.

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del Ing. Richard Esteban Morales Rubí, una vez revisado su Proyecto Terminal de tesis/tesina, titulado "Optimización CAE de un miembro estructural automotriz con estructuras porosas (lattice) utilizando Optistruct." **autorizo** que el citado trabajo sea presentado por el alumno para su revisión, con el fin de alcanzar el grado de **Maestro**.

Sin otro particular por el momento, agradezco la atención prestada.

Dr. Hugo Arcos Gutiérrez	Grado, nombre completo
Asesor Académico	Asesor en Planta

F31a Revisión: 01-Jun-2021

CARTA DE LIBERACIÓN DEL REVISOR

Lerma, Estado de México,27 de Julio del 2021.

Dra. María Guadalupe Navarro Rojero
Directora de Posgrado
CIATEQ, A.C.

Por medio de la presente me dirijo a usted en calidad de Revisor del proyecto terminal del alumno **Richard Esteban Morales Rubí**, cuyo título es:

"Optimización CAE de un miembro estructural automotriz con estructuras porosas (lattice) utilizando Optistruct."

Después de haberlo leído, corregido e intercambiado información con el alumno, y realizado los cambios que le fueron sugeridos, puede ser autorizada su impresión, a fin de que se inicien los trámites correspondientes para su defensa.

Sin otro particular por el momento, y en espera de que mis sugerencias sean tomadas en cuenta en beneficio del estudiante y la Institución, agradezco la atención prestada.

Atentamente,

Firma

M. en C. Iván Juárez Sosa

Grado, nombre completo

F31b Revisión: 01-Mar-2021

DEDICATORIA

A mi Padre y a mi Madre por hacerme feliz desde pequeño, por forjar mi personalidad y el carácter que hasta el día de hoy me ha permitido superarme constantemente.

Dedico esta tesis a mi prometida y compañera de vida quien en todo momento me apoyó y que constantemente me alienta a superarme personal, académica y profesionalmente, éste logro es de ambos Indira.

A mis hermanos que de muchas maneras han sido modelos a seguir inspirándome para ser siempre mejor persona.

A mis amigos ex Baja por siempre estar dispuestos a aligerar la carga académica con una de tantas alegres reuniones.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres por siempre esforzarse tanto en mi preparación y por apoyarme en mis decisiones siempre cuidando mi rumbo y dando lo mejor de sí para mí.

Agradezco a mi alma mater la UAEMéx que con sus excelentes profesores siempre me inspiraron a buscar mi superación académica y sentaron las bases de mi carrera profesional, mención honorífica al Ing. Armando Herrera Barrera.

A mi asesor el Dr. Hugo Arcos Gutiérrez y a mi revisor de tesis el Mtro. Iván Juárez Sosa por su gran disposición y por su valiosa aportación a mi formación.

A mis compañeros de trabajo por siempre mostrarse interesados en apoyarme profesionalmente de manera desinteresada y siempre con gran entusiasmo.

RESUMEN

Dentro de la industria automotriz constantemente se reta a los ingenieros de análisis CAE (Ingeniería Asistida por computadora) a reducir la masa y mejorar el diseño de los diferentes sistemas de un automóvil entre ellos el chasis y la carrocería conformada por diferentes miembros estructurales, uno de ellos es la parte de estudio hecho de un metal de grado automotriz sobre la cual se realizará una optimización CAE usando estructuras porosas (Lattice Structures), se discute el problema matemático de la optimización y sus elementos, posteriormente se presentan los tres casos de carga lineales y un caso dinámico lineal como lo es el análisis de modos normales a los cuales estará sometido nuestro miembro estructural durante su proceso de optimización CAE, se proponen 3 configuraciones de optimización diferentes y para cada una de ellas se discuten los resultados y se justifica la selección de una de esas optimizaciones con base en su desempeño frente al diseño original y su correspondiente ahorro de masa, como punto final se enlistan los objetivos cumplidos y se comunica la aportación de la tesis.

Palabras clave: Ingeniería y tecnología, Ingeniería de los ordenadores, Simulación, CAE, Estructuras porosas, Optimización.

ABSTRACT

Within the automotive industry, CAE (Computer Aided Engineering) analysis engineers are constantly challenged to reduce the mass and improve the design of the different systems of a car, including the chassis and the body structure made up of different structural members, one of them is the study part made of automotive grade aluminum on which a CAE optimization will be carried out using porous structures (Lattice Structures), the mathematical problem of optimization and its elements are discussed, later the three linear load cases and one linear dynamic such as the analysis of normal modes to which our structural member will be subjected during its CAE optimization process, 3 different optimization configurations are proposed and for each of them the results are discussed and the selection of one of them is justified, those optimizations based on their performance versus the original design and their corresponding mass savings as a final point, the objectives achieved are listed and the contribution of the thesis is communicated.

Keywords: Engineering and technology, Computer Engineering, Simulation, CAE, Lattice structures, Optimization.

ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN v
ABSTRACT vi
ÍNDICE DE CONTENIDO vii
ÍNDICE DE FIGURAS ix
ÍNDICE DE TABLAS x
GLOSARIO xi
1. INTRODUCCIÓN 1
1.1. ANTECEDENTES 1
1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA 3
1.3. JUSTIFICACIÓN 4
1.4. OBJETIVOS 4
1.4.1. Objetivo general 4
1.4.2. Objetivos específicos 4
1.5. HIPÓTESIS 5
2. MARCO TEÓRICO 6
2.1. ESTRUCTURAS TIPO LATTICE 6
2.2. EL PROBLEMA MATEMÁTICO DE LA OPTIMIZACIÓN 6
2.3. OPTIMIZACIÓN CAE 7
2.3.1 Variables de diseño 8
2.3.2 Respuestas 8
2.3.3 Función objetivo 9
2.3.4 Funciones de restricción 10
2.4 MÉTODO DEL GRADIENTE 10
2.5 EJEMPLO DE OPTIMIZACIÓN DE UNA VIGA EN VOLADIZO 12
2.6 TIPOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL CON SOFTWARE CAE 15
2.6.1. Optimización topográfica 15
2.6.2. Optimización topológica 18
2.6.3. Optimización de tamaño 19
2.6.4. Optimización topológica con estructuras lattice 20
2.7 EL PROBLEMA DE LOS EIGENVALORES REALES 21
2.7.1. Como procesar la eigen ecuación 22

2.7.2. Ejemplo en 2 dimensiones 24
2.7.3. Solución de la eigen ecuación 26
2.8 TEORÍA DE VON MISES-HENCKY O DE ENERGIA DE DEFORMACIÓN 26
2.8.1. Energía total de deformación 27
2.8.2. Componentes de la energía de deformación 28
2.8.3. Esfuerzo efectivo de Von Mises 29
3. PROCEDIMIENTO 31
4. RESULTADOS 32
4.1. RESULTADOS ITERACIÓN 1 32
4.2. RESULTADOS ITERACIÓN 2 33
4.3. RESULTADOS ITERACIÓN 3 33
4.4. RESULTADOS DE OPTIMIZACION Vs MODELO BASE 34
CONCLUSIONES 37
RECOMENDACIONES 38
APORTACIÓN DE LA TESIS 39
APORTACIÓN SOCIAL DE LA TESIS 40
REFERENCIAS 41
ANEXOS 43

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Estructuras tipo lattice..... 1
Figura 2. Carrocería automotriz de aluminio. 2
Figura 3. Modelo cristal de hielo con impresión 3D..... 3
Figura 4. Representación gráfica del método del gradiente. 11
Figura 5. Diagrama de la viga propuesta. 13
Figura 6. Representación gráfica del problema. 14
Figura 7. Normales a elementos..... 17
Figura 8. Normales en dirección del vector de desmoldeo..... 17
Figura 9. Ejemplo de problema para optimización topológica..... 18
Figura 10. Resultado de distribución de densidad de optimización topológica..... 19
Figura 11. Diferencia entre Optimización con lattices y Optimización Topológica. 21
Figura 12. Definición de eigen vector y eigen valor. 23
Figura 13. Plano XY. 24
Figura 14. Plano XY antes y después de la transformación. 25
Figura 15. Densidad de energía de deformación..... 27
Figura 38. Modelo resultante Iteración 1. 32
Figura 39. Modelo Resultante iteración 2. 33
Figura 40. Modelo resultante iteración 3. 34

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Tabla comparativa de resultados. 35
Tabla 2. Porcentaje de diferencia. 36

GLOSARIO

CAE: Siglas en inglés de Ingeniería Asistida por Computadora.

Compliance: Nombre que recibe la entidad con la que se mide el reciproco de la rigidez en el algoritmo de solución llamado Optistruct.

FEM: Siglas en inglés de Método de elemento finito.

Hypermesh: Software de pre-procesado CAE perteneciente a Altair.

Lattice: Estructura tipo porosa.

Optimización: Proceso iterativo para hacer un sistema o un componente tan bueno como sea posible mientras está sujeto a restricciones y condiciones de frontera diversas.

Optistruct: Algoritmo solucionador perteneciente a la compañía Altair.

$\boldsymbol{l}$: Límite inferior en las variables de diseño.

$\boldsymbol{u}$**:** Límite inferior en las variables de diseño.

$\boldsymbol{\Psi_0(p)\ y\ \Psi_i(p)}$**:** Representan las respuestas del sistema o el valor objetivo para el sistema.

$\boldsymbol{p_j}$ **:** Representan el vector de variables de diseño.

$[\boldsymbol{M}]$**:** Matriz de masa.

$[\boldsymbol{B}]$: Matriz de amortiguamiento.

$[\boldsymbol{K}]$**:** Matriz de rigidez.

$[\boldsymbol{P}]$**:** Vector fuerza aplicada.

$\{\ddot{\boldsymbol{u}}\}$**:** Vector aceleración.

$\{\dot{\boldsymbol{u}}\}$**:** Vector velocidad.

$\{\boldsymbol{u}\}$**:** Vector desplazamiento.

$\boldsymbol{\Phi}$**:** Es el eigenvector o forma del modo.

$\boldsymbol{\omega}$**:** Es la frecuencia circular natural.

[A]: Matriz cuadrada.

[x]: Vector x.

$\boldsymbol{\lambda}$**:** Eigen valor o valor característico.

$\boldsymbol{I}$**:** Matriz identidad.

$\{\boldsymbol{x}\}$**:** Es un eigenvector.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. ANTECEDENTES

La industria automotriz está avanzando rápidamente y esto gracias al uso de herramientas que permiten reducir los tiempos de diseño, de análisis y de manufactura de todos los componentes de un vehículo a la vez que el peso de este también es reducido. Una de las herramientas que comienza a tener cada vez mayor uso es el análisis CAE y particularmente el uso de algoritmos de optimización como OptiStruct que será el usado en nuestro miembro estructural y que es muy usado por diferentes universidades como en Linkopings Universitet (Norberg & Lövgren, 2011).

Utilizando el algoritmo de optimización antes mencionado se pretende reducir el peso de un miembro estructural automotriz, en la optimización se usarán estructuras del tipo lattice (ver figura 1) y se someterá el diseño original a diferentes casos de carga de tipo estático lineal con la intención de mantener e incluso mejorar su desempeño mecánico (esfuerzos y frecuencia natural) en la carrocería, teniendo en mente que una reducción del desempeño de la carrocería puede representar un efecto negativo en el manejo y maniobrabilidad del vehículo en funcionamiento.

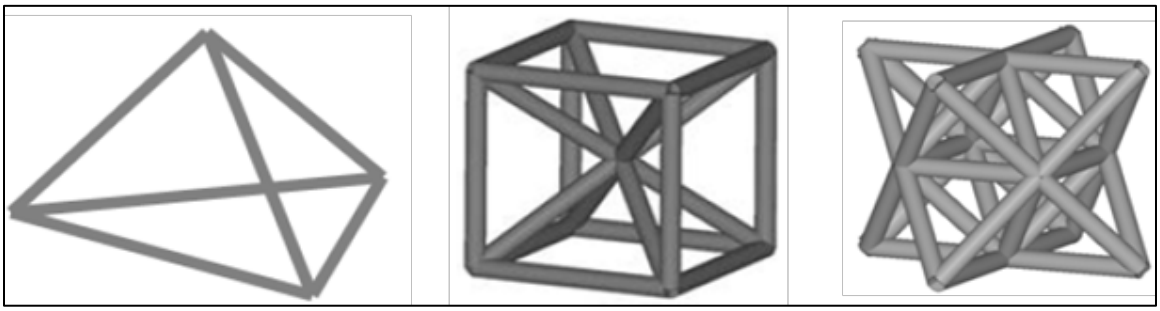


Figura 1. Estructuras tipo lattice.

(Altair Connect, 2016)

La reducción de peso en los vehículos se ha convertido en un objetivo a nivel global y para lograrlo se suelen probar cambios de material (véase Figura 2), cambios radicales de diseño, reducción de contenido innecesario (Dalpadulo, Pini, & Leali, 2020) así como la aplicación de tecnologías de manufactura no convencional como lo es la manufactura aditiva, más concretamente la impresión 3D de componentes plásticos y metálicos (Chen, Zheng, & Liu, 2018) que permiten la creación de geometrías complejas y que nunca se habían tenido en cuenta, como lo son las estructuras de tipo lattice (estructuras porosas). Estás estructuras abren un mundo de posibilidades en la parte estructural de casi cualquier producto, pero también generan un nuevo reto para el ingeniero de diseño que consiste en determinar cuál es la zona en la que se deben agregar estas estructuras para generar el comportamiento mecánico deseado, es ahí en donde se hace necesaria una optimización de con estructuras porosas mediante el uso del software obteniendo así un Modelo de Elementos Finitos (modelo FEM). Nuestro modelo FEM nos mostrará de acuerdo con cada caso de carga cuál podría ser la mejor zona y orientación de las estructuras lattice y que nos permitirán reducir el peso de nuestro componente manteniendo e incluso incrementando su desempeño estructural (Dakshnamoorthy & Taylor, 2016).

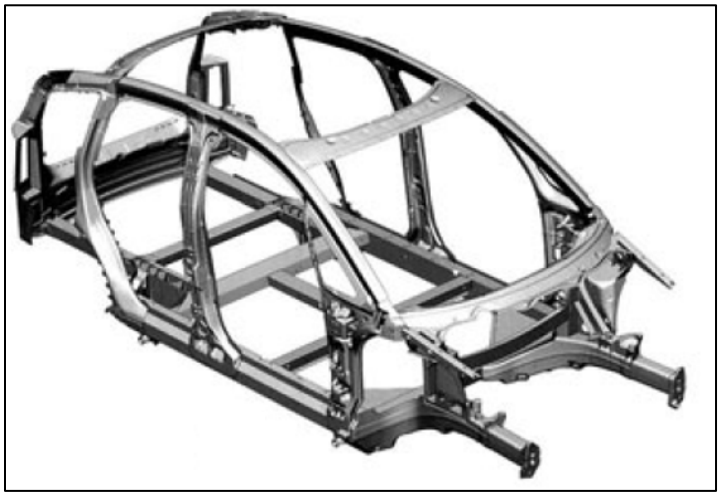


Figura 2. Carrocería automotriz de aluminio.

1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La introducción de tecnologías de impresión 3D en la producción en masa de componentes en la industria automotriz, cada vez está más cerca pues los costos de estos métodos de manufactura se vuelven más costeables con el pasar de los años, sin embargo, ahora debemos prepararnos para que en el momento que la impresión 3D se use de manera regular para la creación de miembros estructurales de carrocería seamos capaces de aprovecharla al cien por ciento. Para la creación de estos diseños será necesario el uso de software que nos permita determinar las zonas en donde se podrán usar estas estructuras de tipo lattice que hoy en día son muy prometedoras pero que sólo se pueden manufacturar mediante el uso de tecnología de impresión 3D (Kanbur, Suping, & Duan, 2020) (ver Figura 3 pieza mediante impresión 3D).

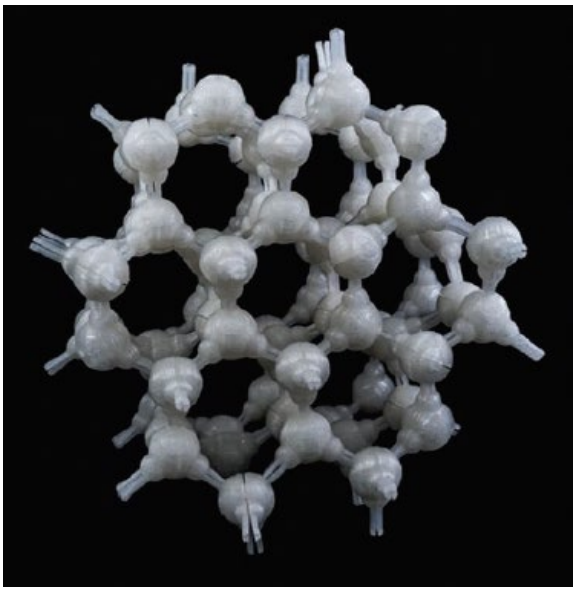


Figura 3. Modelo cristal de hielo con impresión 3D.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Los ingenieros de diseño y de análisis de carrocerías requieren de ayudas virtuales para determinar las siguientes características de un miembro estructural que pueda ser susceptible de ser manufacturado mediante tecnología de impresión 3D dada la naturaleza de su modelado:

1. Conocer los valores de esfuerzo y frecuencia natural de interés del miembro estructural convencional.
2. Conocer los valores de esfuerzo y frecuencia natural de interés del miembro estructural que cuenta con estructuras tipo lattice.
3. Conocer las zonas en las que pueden usarse estructuras tipo lattice.

Conocer las características anteriormente enlistadas permitirá que la adopción y la aplicación de la impresión 3D en componentes de la carrocería de un vehículo pueda ser inmediata una vez que los costos y tiempos de manufactura de esta tecnología queden dentro de los estándares que la industria automotriz requiere.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo general

Realizar la optimización estructural mediante software CAE del miembro estructural utilizando estructuras tipo Lattice (estructuras porosas) que permitan reducir el peso del componente manteniendo o mejorando su desempeño mecánico a los casos de carga aplicados en el modelo FEM de vehículo completo.

1.4.2. Objetivos específicos

- Definir los parámetros que generen un mejor resultado para la optimización.
- Identificar las diferencias en desempeño estructural entre el componente original y el componente optimizado.
- Identificar las diferencias de masa entre el componente original y el componente optimizado.

1.5. HIPÓTESIS

Si el componente elegido de la carrocería es realmente susceptible de una optimización estructural mediante el uso de estructuras de tipo lattice, al final de la optimización se podrá observar una reducción en su masa de al menos 10% mientras su desempeño mecánico se mantiene igual e incluso superior que el diseño original.

2. MARCO TEÓRICO

La intención de este capítulo es proveer la información necesaria relacionada a los diferentes tipos de estructuras tipo lattice, así como los conceptos requeridos para comprender más adelante el paso a paso planteado que será necesario para la correcta configuración de la optimización de tipo lattice a la cual se llegará mediante una serie de pasos entre los que se encuentran diferentes tipos de optimizaciones estructurales.

2.1. ESTRUCTURAS TIPO LATTICE

Las estructuras celulares como la madera el corcho y el hueso se llevan usando en el mundo desde hace siglos y su estructura se imita en materiales modernos como paneles y espumas (Gibson, Ashby, & Harley, 2010).

Las estructuras celulares son una opción muy atractiva para muchas aplicaciones de diseño, particularmente por bajo peso, debido a la alta rigidez y robustez provista por su estructura porosa (J & HW, 2008).

Existe una gran variedad de estructuras celulares entre ellas están las de tipo lattice que se diferencian de las demás por su estructura repetitiva celular de su celda unitaria, para nuestro caso de aplicación éstas estructuras tipo lattice serán las usadas en el proceso de optimización que será descrito en los capítulos siguientes.

La estructura que se generará a partir de los elementos finitos surge de la unión de los nodos del elemento mediante el uso de vigas en los elementos que pueden reducir su densidad de material y no requieren el elemento sólido inicial necesariamente para cumplir con los objetivos planteados como los ya mostrados en la figura 1.

2.2. EL PROBLEMA MATEMÁTICO DE LA OPTIMIZACIÓN

El problema matemático de la optimización es aquel en el cuál tenemos una función objetivo *f(x)* ecuación 1 la cuál buscamos maximizar o minimizar según el

caso algunas veces buscamos maximizar el desempeño estructural como la frecuencia natural de un componente y en otras ocasiones buscamos minimizar su masa. El siguiente paso para la creación de nuestro problema de optimización es definir el rango en el que podemos mover algunos parámetros del diseño como podrían ser el área, la masa, etc.

Después de que definimos lo que si podemos mover del diseño ahora toca agregar las restricciones a nuestro problema de optimización, éstas restricciones suelen estar en línea con las especificaciones que debe mantener la pieza para su correcto funcionamiento y pueden ser restricciones mecánicas como evitar superar un nivel de esfuerzos establecido o un desplazamiento pero también pueden existir restricciones de manufactura, como evitar el movimiento de la geometría en una dirección diferente a la dirección de desmoldeo o estampado de nuestra pieza, la función g(x) ecuación 2 típicamente toma el nombre de función restricción y tomara valores desde $\boldsymbol{x_i^B}$ hasta $\boldsymbol{x_i^A}$ de acuerdo al rango permitido por nosotros en ésas restricciones como se muestra en la ecuación 3.

$\boldsymbol{f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ .....Ecuación 1

$\boldsymbol{g(x) <= 0 \quad j = 1, 2, \dots, m}$ .....Ecuación 2

$\boldsymbol{x_i^B <= x_i <= x_i^A}$..... Ecuación 3

Así es como típicamente queda conformado el problema de la optimización (Park & Dang, 2010).

2.3. OPTIMIZACIÓN CAE

La optimización puede ser definida como el proceso iterativo para hacer que un sistema o componente sea tan bueno como sea posible basado en una función objetivo y sujeto a ciertas restricciones de diseño. Hay muchos métodos y algoritmos diferentes que pueden ser usados para optimizar una estructura, en OptiStruct son implementados algunos algoritmos basados en el Método del Gradiente.

2.3.1 Variables de diseño

Las variables de diseño son parámetros del sistema que pueden variar para optimizar el desempeño del sistema estas variables de diseño definen el tipo de optimización que se usa, en nuestro análisis utilizaremos las siguientes:

- **Topológica**: Es una técnica matemática que optimiza la distribución del material para una estructura en un espacio dado. Las variables de diseño son definidas como densidad ficticia para cada elemento, y esos valores son variados desde 0 a 1 para optimizar la distribución del material (Reintjes & Lorenz, 2020).
- **Tamaño:** Es una forma automática de modificar los parámetros de la estructura para encontrar el diseño óptimo. Las variables de diseño son cualquier parámetro escalar como el espesor, propiedades de elementos 1D como diámetros, propiedades del material (Altair Connect, 2016), etc.

2.3.2 Respuestas

Las respuestas son cualquier valor o función que depende de la variable de diseño y es evaluada durante la solución.

El software permite el uso de numerosas respuestas estructurales que son calculadas en el análisis de elemento finito, también pueden ser usadas combinaciones de respuestas para ser usadas como función objetivo o como funciones de restricción en una optimización estructural.

Como norma las respuestas son introducidas mediante el comando DRESP1 y cuando se trata de una combinación de respuestas se utiliza el comando DRESP2.

Hay que destacar que podemos utilizar respuestas que son globales y otras que son por sub-caso de carga.

Las siguientes son algunas de las respuestas más comunes en las optimizaciones:

- Masa, Volumen: Ambas son respuestas globales que pueden ser definidas para toda la estructura, para componentes y materiales individuales o para grupos de propiedades y materiales.

- Fracción de masa, Fracción de volumen: Ambas son respuestas globales con valores entre 0 y 1. Describen una fracción del espacio de diseño inicial en una optimización topológica y también se pueden definir para componentes y materiales individuales o en grupo.
- Compliance: El "compliance" es la energía de deformación de la estructura y puede ser considerado como el recíproco de la rigidez de la estructura. Puede ser definido para toda la estructura o únicamente para el componente de interés en un solo caso estático.
- Compliance ponderado: Es un método para considerar múltiples sub-casos o casos de carga para una optimización topológica y es igual a la suma ponderada del compliance de cada uno de los casos de carga evaluados en la optimización.

2.3.3 Función objetivo

La función objetivo es simplemente una respuesta obtenida de nuestro modelo FEM que en un siguiente paso se buscara maximizar o minimizar según sea el caso.

Tenemos dos formas de especificar un objetivo para nuestra respuesta, la primera forma es configurar el software para que nos permita maximizar o minimizar nuestra respuesta de interés o como segunda opción podemos definir que el software maximice un valor mínimo o que intente minimizar un valor máximo.

Para el primer caso en el que una respuesta simple se define como función objetivo un comando del tipo **DESOBJ** debe de ser incluido en el sub-caso de optimización en el archivo de entrada. El comando **DESOBJ** hace referencia a la función de respuesta mediante su ID y entre paréntesis indica el tipo de objetivo de optimización que se buscará en el análisis como lo podemos ver escrito en código a continuación.

DESOBJ (MIN) = 1.

El segundo caso donde el objetivo hace referencia a múltiples respuestas requiere el uso del comando **DOBJREF** y **MINMAX** o **MAXMIN** según sea el caso. Enseguida podemos observar la sintaxis usada para indicarle al software que nos interesa minimizar el valor máximo encontrado en la respuesta con ID 1 así como en la respuesta con ID 2.

MINMAX = 1

MINMAX = 2

2.3.4 Funciones de restricción

Así como en cualquier problema de ingeniería en el que encontramos oportunidades de mejora también encontramos restricciones para la misma debidas a factores variados. En el caso de la optimización estructural también encontramos restricciones que deben ser consideradas y cumplidas, se suelen introducir en el problema como limites inferiores y superiores en los que alguna de nuestras respuestas puede moverse y que son dependientes de nuestra variable de diseño.

2.4 MÉTODO DEL GRADIENTE

OptiStruct usa un procedimiento iterativo conocido como método de aproximación local para resolver el problema de optimización. Esta aproximación está basada en asumir que sólo cambios pequeños ocurren en el diseño con cada iteración de optimización. El resultado es un mínimo local.

Los cambios más grandes ocurren en las primeras iteraciones de optimización, como resultado no muchos análisis del sistema son necesarios en aplicaciones prácticas.

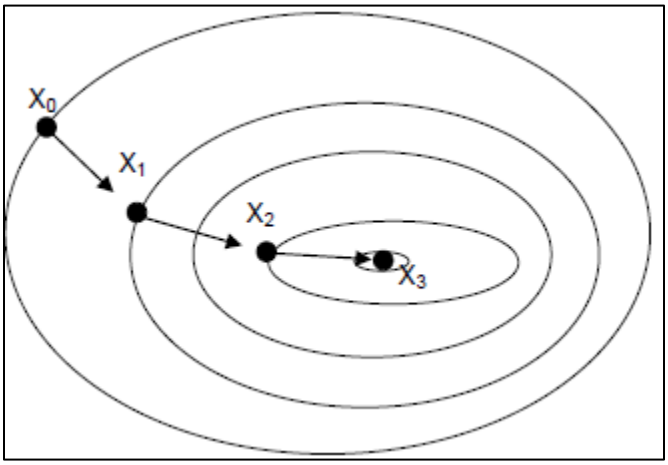
El análisis de sensibilidad de las respuestas de la estructura (respecto de las variables de diseño) es uno de los ingredientes más importantes para llevar una variación simple de diseño a una optimización computacional.

La actualización del diseño es procesada usando la solución aproximada de un problema de optimización que es establecido usando la información de sensibilidad. El algoritmo de optimización tiene tres diferentes métodos implementados: el método del criterio óptimo, el método doble, y el método de direcciones primordiales factibles.

Para nuestro caso el Método del criterio óptimo es usado para la formulación de la optimización topológica minimizando el compliance (o compliance ponderado o mixto) con una restricción de masa, volumen o una fracción de las anteriores. De cualquier manera, la opción a usar es tomada automáticamente por el software.

El método del Gradiente es un algoritmo de optimización que es usado para encontrar el mínimo de una función usando el valor del gradiente, el algoritmo puede ser descrito como:

1. Comienza desde un punto Xo.
2. Evalúa la función F(X) y el gradiente de la función$\nabla F(X_i)$ en Xi.
3. Determina el siguiente punto usando la dirección del gradiente negativo: $X_{I+1} = X_i - \gamma . \nabla F(X)$.
4. Repite el del paso 2 al 3 hasta que la función converja al mínimo (véase figura 4).



(Altair Engineering, 2013)

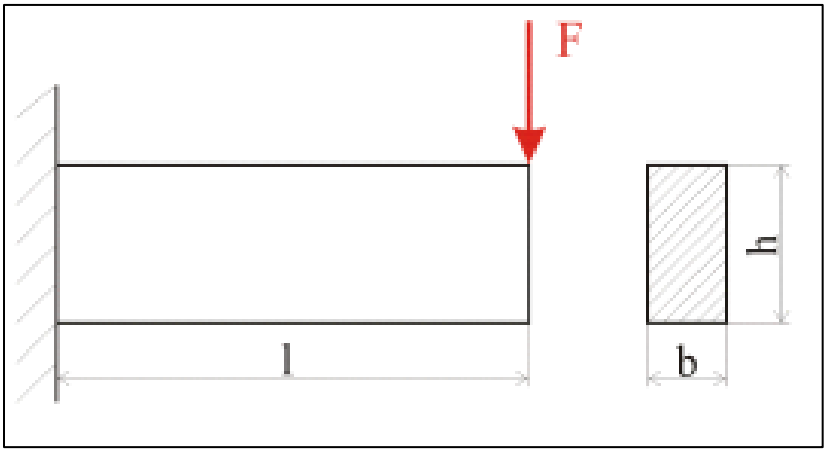
Los métodos de optimización basados en el Método del gradiente son efectivos cuando las derivadas de las respuestas del sistema respecto de las variables de diseño pueden ser procesadas de manera sencilla y sin mucho costo computacional.

2.5 EJEMPLO DE OPTIMIZACIÓN DE UNA VIGA EN VOLADIZO

Para entender de una mejor manera los conceptos introducidos hasta este punto, vamos a ejemplificarlos sobre el diseño de una viga en voladizo a la que le aplicaremos una fuerza "F" de 24000 N, su sección rectangular tendrá una base "b" de 20 entre los puntos del eje X 20 y 40, la altura "h" será sobre el eje Y en los puntos 30 y 90. El esfuerzo normal máximo no podrá exceder el esfuerzo máximo permitido que para nuestro caso es propuesto de 70 MPa, tampoco se puede exceder el esfuerzo cortante máximo de 15 MPa y por restricciones de espacio la sección transversal de nuestra viga no puede incrementar la altura más de 2 veces la dimensión de la base.

La intención de la optimización de este ejemplo es reducir el peso de la viga sujeta a las condiciones antes descritas, a continuación, un breve resumen del problema y en la figura 5 encontramos un diagrama de la viga descrita.

1) El esfuerzo normal máximo no puede exceder $\sigma_{máx} = 70MPa$.
2) El esfuerzo cortante máximo no puede exceder $\tau_{máx} = 15\ MPa$.
3) La altura "h" no puede ser mayor a 2 veces la base "b".



(Altair Engineering, 2013)

Matemáticamente este problema lo podemos describir como se muestra enseguida:

Objetivo: minimizar **Peso (b, h)** ……Ecuación 4

Variables de diseño: $\boldsymbol{b_L < b < b_U}$**, esto es** $\boldsymbol{20 < b < 40}$ …… Ecuación 5

$\boldsymbol{h_L < h < h_U}$**, esto es** $\boldsymbol{30 < b < 90}$ …….... Ecuación 6

Restricciones de diseño: $\boldsymbol{\sigma(b,h) = 6F/(bh^2) \leq \sigma_{máx}}$ con $\sigma_{máx} = 70MPa.$ …Ecuación 7

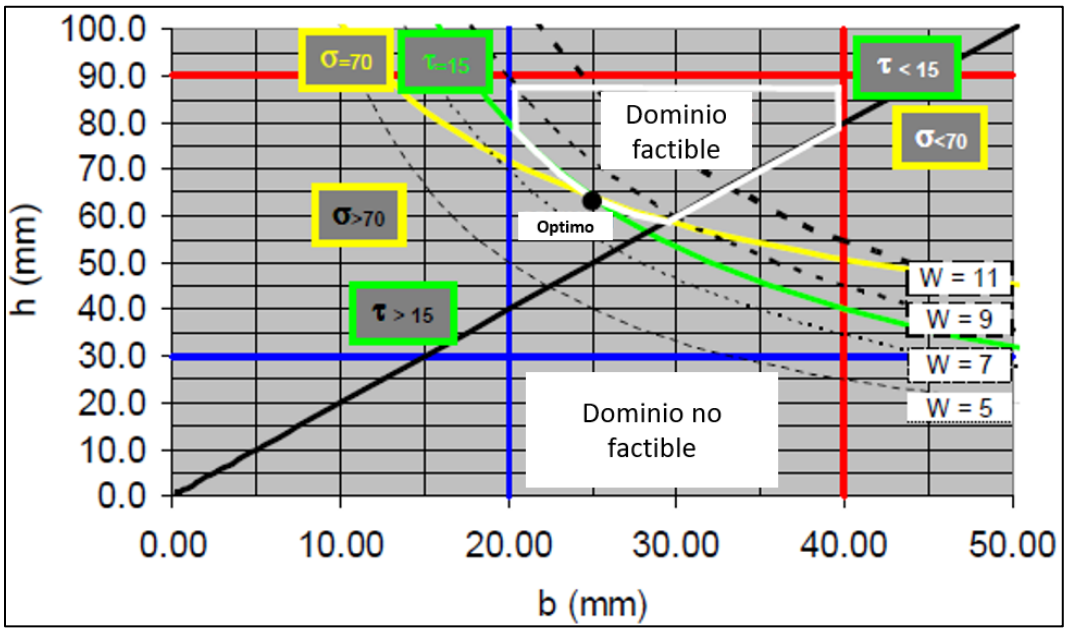
$\boldsymbol{\tau(b,h) = F/(bh) \leq \tau_{máx}}$ con $\tau_{máx} = 15\ MPa.$ ……Ecuación 8

$h \geq 2 * b$ ……Ecuación 9

El problema también lo podemos describir de manera gráfica como lo mostramos en la figura 6 y en la cual observamos que a medida que cambia la altura y la base de la sección transversal de la viga, nuestro dominio factible de diseño se acota en el eje X por nuestros límites de la base en x=20 mm y x=40 mm, de igual manera los valores de la altura y=30 como mínimo y y= 90 mm acotan nuestra solución en el eje Y.

Observamos también que nuestra solución marcada en el punto negro como "Optimo" es aquella que cumple con el nivel tanto de esfuerzo normal como de esfuerzo cortante permitido además de que el peso obtenido en ese punto es W=8 y también se encuentra cumpliendo las restricciones de valor de la base y la altura permitidas.

En esencia así es como funciona cualquier proceso de optimización, generamos una función que estará formada por diferentes variables de interés para nuestro diseño y enseguida decidimos si se busca maximizar o minimizar su valor cuidando que nuestro punto óptimo siempre cumpla con las restricciones impuestas a nuestra función objetivo y que además se encuentre en el dominio permitido de las diferentes variables que conforman nuestra función objetivo, llegados a ése punto que cumple con éstas características podríamos decir que hemos encontrado una solución a nuestro problema de optimización. Es importante resaltar que regularmente pueden existir diferentes puntos de solución a nuestro problema, pero sólo una de ellas será la que consideremos como optima al comprobarse el cumplimiento de las restricciones impuestas.



(Altair Engineering, 2013)

2.6 TIPOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL CON SOFTWARE CAE

La optimización estructural la podemos definir como el proceso automático que nos ayuda a lograr que nuestro diseño sea tan bueno como pueda serlo al ser sometido a diferentes casos de carga. Mediante la modificación de diferentes parámetros del diseño se forma nuestra función objetivo, misma que buscaremos maximizar o minimizar según sea el caso encontrando un valor que además cumpla con las diferentes funciones de restricción impuestas al diseño.

Podemos generalizar cualquier optimización con una función objetivo, funciones de restricción y un espacio de diseño dado.

Función objetivo: $\boldsymbol{\Psi_0(p) \Rightarrow minimizar\ o\ maximizar}$ ……Ecuación 10

Funciones restricción: $\boldsymbol{\Psi_i(p) \leq 0}$ …….. Ecuación 11

Espacio de diseño: $\boldsymbol{p^l \leq p_j \leq p^u}$……Ecuación 12

Donde:

$\boldsymbol{l = límite\ inferior\ en\ las\ variables\ de\ diseño}$

$\boldsymbol{u = límite\ superior\ en\ las\ variables\ de\ diseño}$

$\boldsymbol{\Psi_0(p)\ y\ \Psi_i(p)\ representan\ las\ respuestas\ del\ sistema\ o\ el\ valor\ objetivo\ para\ el\ sistema}$

$\boldsymbol{p_j = representa\ el\ vector\ de\ varaiables\ de\ diseño\ (p_1, p_2, \dots, p_n)}$

2.6.1. Optimización topográfica

La optimización topográfica es una forma avanzada en la que una región de nuestro modelo FEM es predefinida por el usuario como área o espacio de diseño y sobre esta región se generará un una geometría o un patrón de esa geometría que permita mejorar el desempeño del modelo frente a un caso de carga determinado cumpliendo las restricciones impuestas. La obtención de esa geometría se genera a partir de un cambio en la malla del espacio de diseño de

modo que las coordenadas de los nodos cambian en diferentes direcciones y que también pueden ser restringidas mediante restricciones de manufactura como ángulos de desmoldeo, ejes, se puede especificar si el componente será manufacturado por moldeo o por extrusión. Es posible también acotar en el software un cambio máximo que podemos permitir sobre los nodos de la malla y regularmente ese valor se da en milímetros.

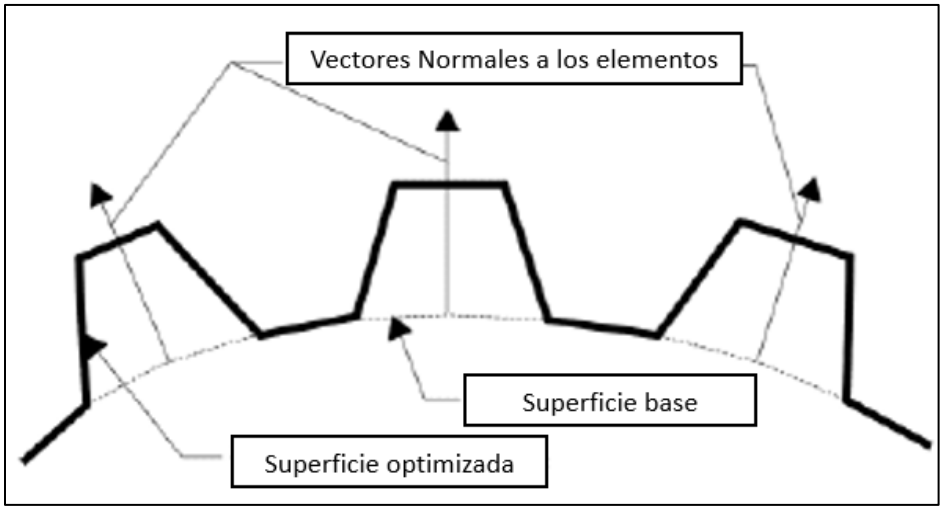
Al tipo de geometrías que genera la optimización topográfica se le conoce de manera general como depresiones o "beads" y las opciones que se tienen para elegir el patrón de distribución de estas depresiones suelen ser:

- Lineal
- Plana
- Circular
- Radial

Aunque este tipo de optimización principalmente se realiza sobre elementos del tipo 2D como los elementos tipo "Shell" también tiene uso con elementos 3D.

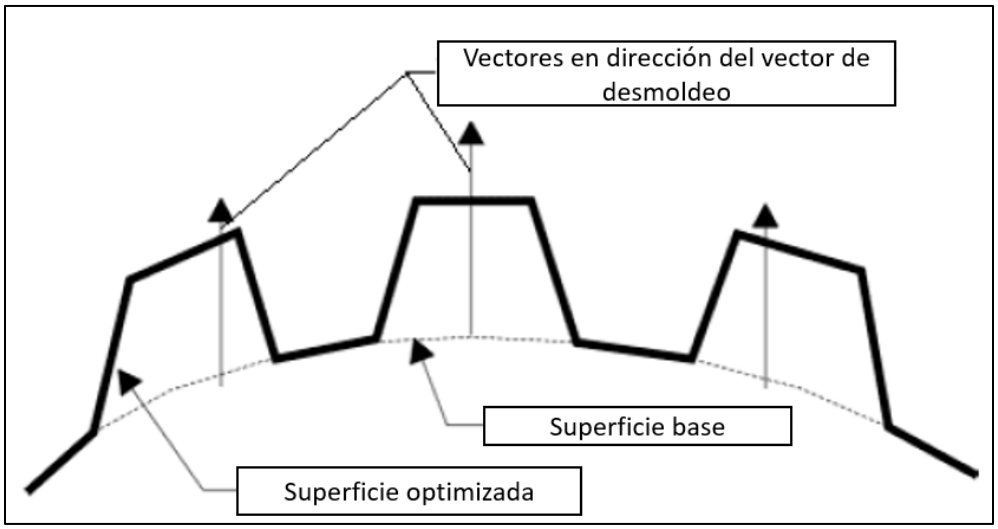
Existen tres formas de generar la variable de diseño del tipo topográfica:

- Normal al elemento: Es la manera más sencilla de definir la variable topográfica y consiste en utilizar la dirección normal de cada elemento y es especialmente útil cuando la superficie de interés es curva como se muestra en la figura 7.



(Altair Engineering, 2013)

- Vector de desmoldeo: Este método permite definir el vector de desmoldeo que queremos usar para generar las geometrías de refuerzo como se muestra en la figura 8.

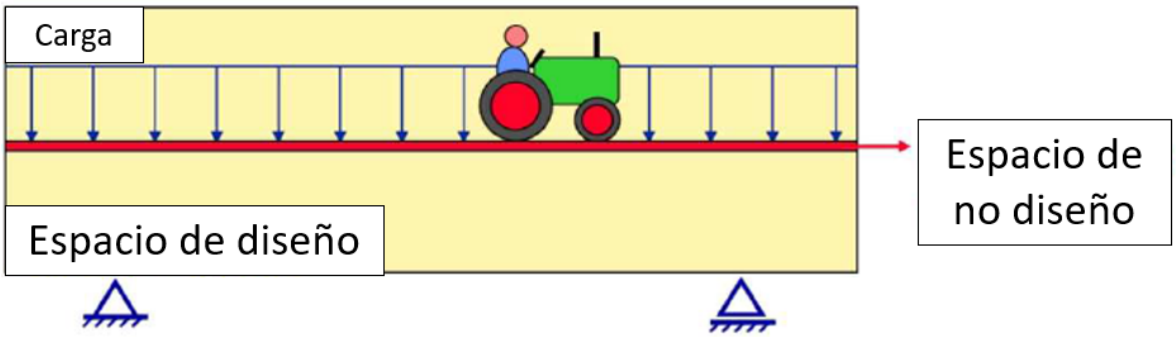


(Altair Engineering, 2013)

- Definido por el usuario: Este método permite definir el vector en la dirección que se generarán las depresiones, su altura, su ángulo de desmoldeo e incluso el ancho en la base de las depresiones.

2.6.2. Optimización topológica

La optimización topológica es una técnica matemática que produce una forma y distribución de material optimizada para una estructura en un espacio de diseño dado. Optistruct calcula las propiedades del material para cada uno de los elementos del espacio de diseño en la malla con la finalidad de cumplir con el objetivo de la optimización ya sea maximizar o minimizar la variable de diseño y cumplir al mismo tiempo con las restricciones impuestas, en la figura 9 se muestra un ejemplo de un tipo de problema en el que se aplica una optimización topológica en donde en rojo tenemos el espacio de no diseño, en amarillo toda el área de diseño y observamos una carga constante a lo largo de toda la viga, observamos también que el espacio de diseño cuenta con 2 puntos de fijación.



(Altair, 2014)

Optistruct resuelve las optimizaciones topológicas mediante la homogenización de la densidad del material a través del espacio de diseño y la densidad de cada uno de los elementos de ese espacio deberá tomar el valor de 0 o 1 lo que sígnica que

cada uno de los elementos quedará definido como un elemento que existe que es sólido o como un elemento vacío es decir un vacío de material.

Para el ejemplo planteado en la figura 9 podríamos tener como resultado una gráfica como la mostrada en la figura 10 que nos muestra las zonas del espacio de diseño en las que se requiere tener material con densidad de 1 así como aquellas zonas en azul en las que podemos decir que no es necesario mantener el material inicialmente definido en el espacio de diseño.

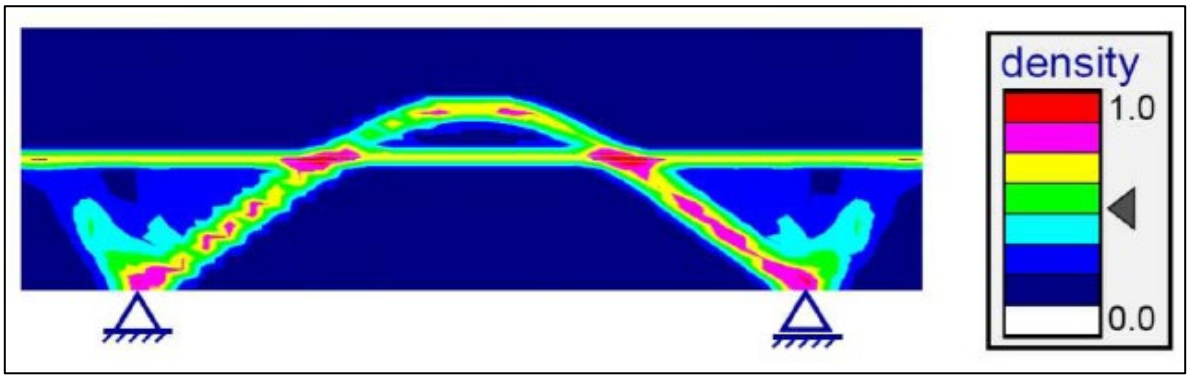


Figura 10. Resultado de distribución de densidad de optimización topológica.

(Altair Engineering, 2013)

2.6.3. Optimización de tamaño

La optimización de tamaño en Optistruct es posible combinarla con otros tipos de optimización, este tipo de optimización fue desarrollada con la intención de optimizar las propiedades estructurales de los elementos en el espacio de diseño, entre esas propiedades susceptibles de ser optimizadas se encuentran las siguientes:

- Espesor de los elementos 2D tipo shell
- Propiedades de la sección transversal de elementos tipo viga
- Rigidez de elementos tipo resorte
- Masa

Al finalizar la optimización Optistruct asigna al modelo FEM el valor requerido en la propiedad optimizada como podría ser el espesor requerido en los elementos 2D

tipo shell que permita cumplir con las restricciones impuestas y con el objetivo de optimización seleccionado ya sea maximizar o minimizar la función objetivo.

2.6.4. Optimización topológica con estructuras lattice

La optimización estructural con lattices es una solución novedosa para crear solidos suaves y estructuras porosas desde la etapa conceptual del componente hasta la etapa del diseño final (Gratzer, 2016). Esta tecnología es desarrollada particularmente para asistir el diseño de innovación para manufactura aditiva (impresión 3D). La solución es alcanzada a través de dos fases de optimización. La fase 1 es una optimización topológica clásica, pero con opciones propuestas para permitir la existencia de mayor cantidad de material poroso en rangos de densidades intermedias.

La Fase 2 transforma las zonas porosas de la fase 1 en estructuras tipo lattice explicitas. Entonces la dimensión de los miembros tipo lattice es optimizada en la segunda fase típicamente con restricciones de esfuerzos, desplazamientos, etc. El resultado final es una estructura redondeada con partes sólidas y zonas de estructuras tipo lattice con diferentes volúmenes de material. Para la versión de OptiStruct usada se proveen dos tipos de celdas de tipo lattice tetraédricas y celdas tipo pirámides/diamantes derivadas de mallas tetraédricas y hexaédricas respectivamente y el tamaño también está restringido por el tamaño de la malla usada en el componente optimizado.

Este tipo de optimización con lattices a diferencia de la optimización topológica clásica ya puede considerar elementos con densidades intermedias en su dominio de diseño. Las estructuras tipo lattice son más eficientes comparadas con aquellas estructuras en las que sus elementos solamente pueden obtener un valor de densidad de 0 o de 1, es decir solamente se obtiene un resultado en el que los elementos permanecen o son desechados de la estructura optimizada como se muestra en la figura 11.

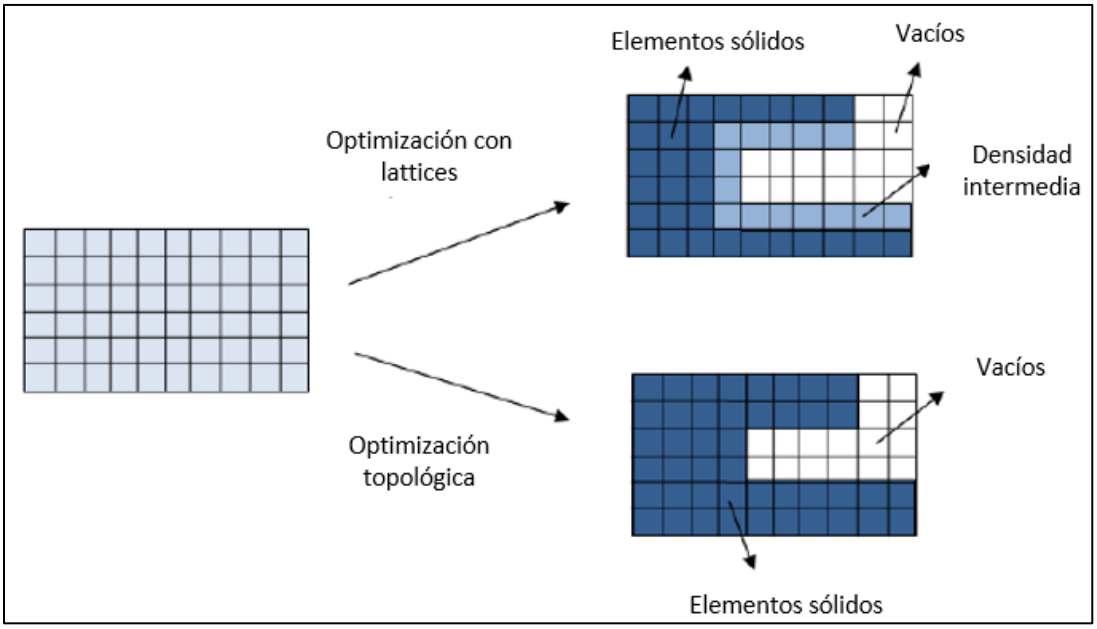


Figura 11. Diferencia entre Optimización con lattices y Optimización Topológica. (Altair Engineering, 2013)

2.7 EL PROBLEMA DE LOS EIGENVALORES REALES

En problemas de mecánica continua, los desplazamientos nodales representan las cantidades matemáticas desconocidas. El modelo está basado en la ecuación matricial 13, la cual define el estado de equilibrio de las fuerzas actuando en la estructura.

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{u}}\} + [\boldsymbol{B}]\{\dot{\boldsymbol{u}}\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{u}\} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) \quad \text{Ecuación 13}$$

En el glosario podemos encontrar la descripción de cada término de la ecuación de equilibrio número 13.

Para resolver la ecuación de movimiento y encontrar las frecuencias naturales y los modos normales, se usa una forma reducida de la ecuación de movimiento. Como no hay amortiguamiento ni fuerzas aplicadas, la ecuación de movimiento se convierte en la ecuación 14, ésa es la ecuación de movimiento para vibraciones libres sin amortiguamiento.

$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{u}}\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{u}\} = \boldsymbol{0}$ ……..……Ecuación 14

Para resolver la ecuación 14 se asume una solución armónica en la ecuación 15.

$\{\boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{\Phi}\}\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{\omega t})$ ……...Ecuación 15

Por diferenciación de la ecuación 15 asumida como solución podemos obtener la ecuación 16.

$\{\ddot{\boldsymbol{u}}\} = -\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{2}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{\omega t})$ ……..Ecuación 16

Al sustituir en la ecuación 14 de movimiento para vibraciones libres sin amortiguamiento obtenemos la ecuación 17 posteriormente al simplificar la se obtiene la ecuación 18 conocida como eigen ecuación.

$-\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\Phi}\}\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{\omega t}) + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\Phi}\}\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{\omega t}) = \boldsymbol{0}$ ……...Ecuación 17

Dónde:

$\left([\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{M}]\right)\{\boldsymbol{\Phi}\} = \boldsymbol{0}$ ……Ecuación 18

2.7.1. Como procesar la eigen ecuación

Resolver la eigen ecuación consiste en encontrar los eigen valores ω^2 y los eigen vectores $[\Phi]$ que satisfagan la eigen ecuación.

Para entender los conceptos de eigen vector y eigen valor revisemos el algebra lineal de la ecuación 19, dónde [A] es una matriz cuadrada y [x] es un vector.

$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{x}]$ ……Ecuación 19

Cuando los vectores son multiplicados por [A], casi todos los vectores cambian en dirección, excepto ciertos vectores para los que su dirección es la misma que de [A]{x}. Esos vectores son llamados eigen vectores o vectores característicos. Si multiplicamos un eigen vector por [A], el vector [A]{x} es un número λ veces el

original {x}, $[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{x}]$. El número $\boldsymbol{\lambda}$ es conocido como un eigen valor o valor característico.

En la figura 12 podemos observar que la matriz A actúa escalando el vector {x} sin cambiar su dirección. Por lo que {x} es un eigen vector de [A] y $\boldsymbol{\lambda}$ es el eigen valor asociado.

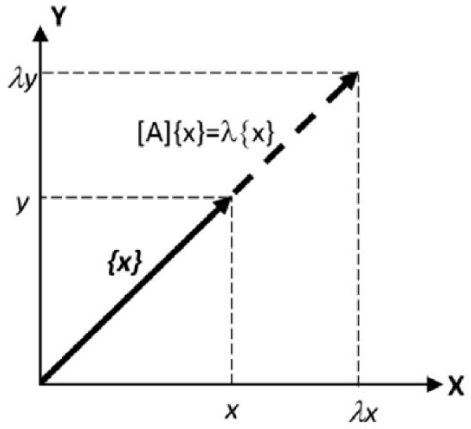


Figura 12. Definición de eigen vector y eigen valor.

(Madier, 2020)

El eigen valor determina si el eigen vector {x} es estirado, aplastado, invertido o permanece sin cambio cuando es multiplicado por [A]. Entonces podemos encontrar en la ecuación 19 y ecuación 20 forma típica de un problema de eigenvalores.

$[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}]\{\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{0}$ .....Ecuación 20

Para resolver el problema de eigen valores para una matriz "n por n":

1. Procesar el determinante de $[A - \lambda I]$. El resultado es un polinomio en λ de grado n.
2. Encontrar las raíces del polinomio del paso 1 resolviendo $\det[A - \lambda I] = 0$. Las n raíces son los eigen valores de [A].
3. Para cada eigen valor λ, resolvemos $[A - \lambda I]x = 0$ para encontrar los eigen vectores.

2.7.2. Ejemplo en 2 dimensiones

Vamos a ilustrar el proceso de solución de la eigen ecuación con un ejemplo en dos dimensiones, consideremos la matriz de transformación de la ecuación 21

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \text{ .....Ecuación 21}$$

y vamos a encontrar el efecto de transformación que tiene sobre los puntos en el plano "XY" de la figura 13.

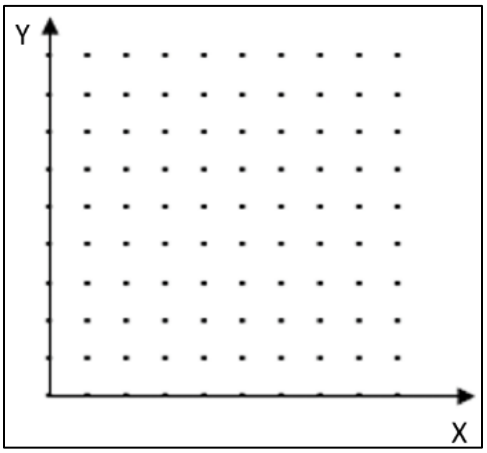


Figura 13. Plano XY.

(Madier, 2020)

Encontramos el polinomio característico escribiendo el determinante $|A - \lambda I|$ y desarrollándolo a continuación en la ecuación 22:

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = \left|\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} - \boldsymbol{\lambda}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\right| = \mathbf{3} - \mathbf{4}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}} \text{ ..... Ecuación 22}$$

Al resolver el polinomio en λ obtenemos $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{1}$ **y** $\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{3}$, que son nuestros 2 eigen valores.

Para $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{1}$ encontramos su eigen vector asociado mediante la ecuación 23:

$$[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}]\{\boldsymbol{v}\}_{\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ ..... Ecuación 23}$$

Resolviendo obtenemos la ecuación 24:

$$\{\boldsymbol{v}\}_{\lambda=1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{Bmatrix} \quad \text{Ecuación 24}$$

Para $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$, el eigen vector asociado es el mostrado en la ecuación 26 resolviendo la ecuación 25:

$$[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}]\{\boldsymbol{v}\}_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 25}$$

$$\{\boldsymbol{v}\}_{\lambda=3} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix} \quad \text{Ecuación 26}$$

Entonces podemos decir que $\{v\}_{\lambda=1}$ y $\{v\}_{\lambda=3}$ son los eigen vectores de [A] asociados con los eigen valores $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ **y** $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ respectivamente. Estos resultados significan que la matriz de transformación [A] preserva la dirección de los vectores que son paralelos a los eigen vectores. Por lo tanto, los vectores rojos que no son paralelos a ningún eigen vector cambian su dirección por la transformación. Después de la transformación la longitud de los vectores azules se incrementa por un factor de 3, mientras que los vectores purpura no cambia pues sus eigen valores son 1.0, lo anterior se observa en la figura 14.

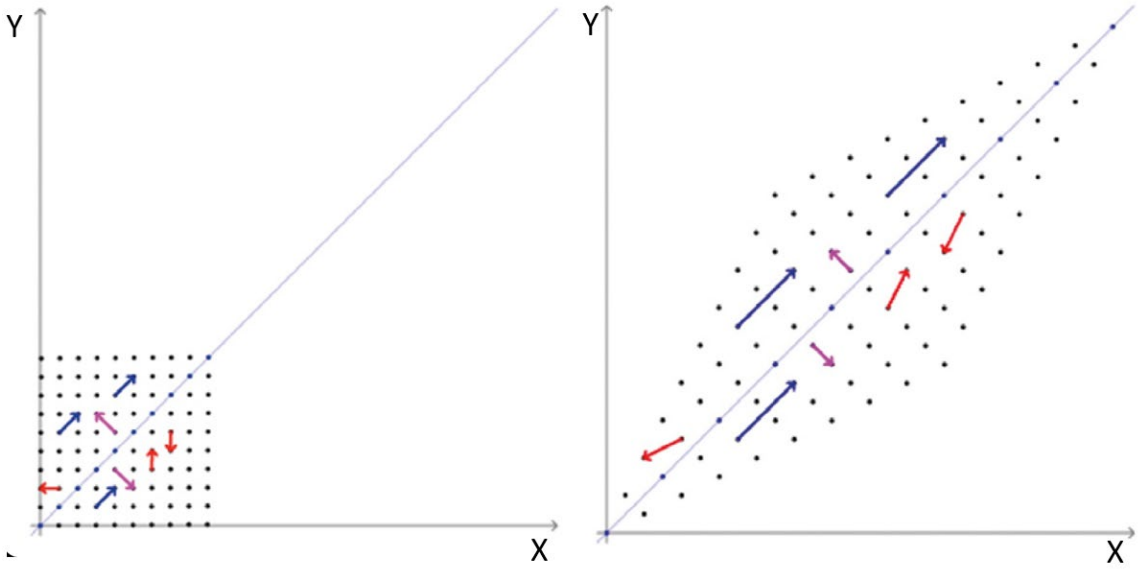


Figura 14. Plano XY antes y después de la transformación.
(Madier, 2020)

2.7.3. Solución de la eigen ecuación

En el análisis estructural, las frecuencias naturales y modos de vibración están relacionados con la rigidez y la masa en la eigen ecuación 18.

Dónde ahora haremos $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$.

Hay dos posibles soluciones:

1. Si $\mathbf{det}([\mathbf{K}] - \boldsymbol{\lambda}[\mathbf{M}])$ **es diferente de 0** la única solución trivial es $\{\boldsymbol{\Phi}\} = \mathbf{0}$. Desde un punto de vista físico, esta solución no es relevante, pues representa un caso de no movimiento.
2. Si $\mathbf{det}([\mathbf{K}] - \boldsymbol{\lambda}[\mathbf{M}]) = \mathbf{0}$ **entonces una solución no trivial** $\{\boldsymbol{\Phi}\}$ $\boldsymbol{diferente\ de}$ $\mathbf{0}$ es obtenida. El determinante sólo es 0 en un set discreto de eigen valores λ_i. Para cada eigen valor hay un eigen vector que satisface: $([\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{M}])\{\boldsymbol{\Phi}\}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{0}$.

Cada eigen valor y eigen vector definen un modo de vibración libre de la estructura. El i-ésimo eigen valor está relacionado al i-ésima frecuencia por: $\boldsymbol{f_i} = \frac{\boldsymbol{\omega_i}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}$.

Es importante también mencionar que debido a que el amortiguamiento es despreciado en este análisis los eigen valores (frecuencias naturales) son valores reales. Si se considerara el amortiguamiento los eigen vectores se convierten en valores complejos. La solución para frecuencias naturales no amortiguadas y modos es llamada "Análisis de Eigen valores reales" o "Análisis de modos normales".

2.8 TEORÍA DE VON MISES-HENCKY O DE ENERGIA DE DEFORMACIÓN

Actualmente se sabe que el mecanismo de fluencia microscópico es causado por el deslizamiento relativo de los átomos del material dentro de su estructura, este deslizamiento es causado por un esfuerzo cortante y por la distorsión de la forma de la pieza, la energía generada por la distorsión es un indicador de la magnitud del esfuerzo cortante presente.

2.8.1. Energía total de deformación

La energía de deformación U en unidad de volumen (densidad de energía de deformación) asociada con cualquier esfuerzo es el área bajo la curva esfuerzo-deformación unitaria, hasta el punto en que se aplica el esfuerzo como se muestra en la figura 15.

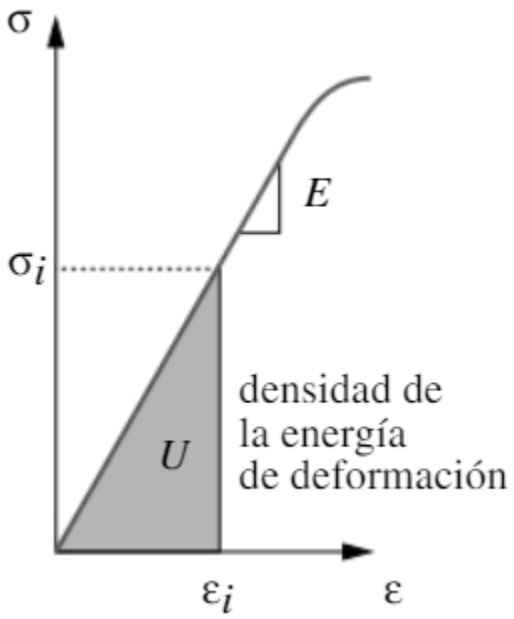


Figura 15. Densidad de energía de deformación.

(Norton, 2011)

Se supone lineal la parte de la curva esfuerzo deformación justo hasta el punto de fluencia y entonces podemos expresar la energía de deformación total por unidad de volumen en cualquier punto de ese intervalo mediante la ecuación 27.

$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon}$ .....Ecuación 27.

Si ampliamos la ecuación 27 a un estado de esfuerzo tridimensional obtenemos la ecuación 28 usando los esfuerzos principales y las deformaciones principales que actúan sobre los planos de esfuerzo cortante igual a cero.

$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)}$……Ecuación 28.

Esta expresión se plantea tan sólo en términos de esfuerzos principales, sustituyendo las relaciones de la ecuación 29,30 y 31 dónde v es la razón de poisson y se obtiene finalmente la ecuación 32.

$\boldsymbol{\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - v\sigma_2 + v\sigma_3)}$……..Ecuación 29.

$\boldsymbol{\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - v\sigma_1 + v\sigma_3)}$……..Ecuación 30.

$\boldsymbol{\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\sigma_3 - v\sigma_1 + v\sigma_2)}$……..Ecuación 31.

$\boldsymbol{U = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2v(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]}$……Ecuación 32.

2.8.2. Componentes de la energía de deformación

La energía de deformación en una pieza cargada consta de dos componentes, una correspondiente a la carga hidrostática que cambia su volumen, y otra que corresponde a la distorsión que cambia su forma, si se separan las componentes la energía de distorsión dará una medida del esfuerzo cortante presente. Entonces tenemos la ecuación 33 que define la energía de distorsión como la suma de la componente hidrostática Uh o volumétrica y la componente de energía de distorsión Ud.

$\boldsymbol{U = U_h + U_d}$……Ecuación 33.

Expresando los esfuerzos principales en términos de la componente hidrostática (o volumétrica) σ_h que es común a cada cara y una componente de distorsión σ_{ld} que es única en las caras y donde i representa la dirección del esfuerzo principal. 1. 2 o 3 tenemos las ecuaciones 34, 35 y 36.

$\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_h + \sigma_{ld}}$……Ecuación 34.

$\boldsymbol{\sigma_2 = \sigma_h + \sigma_{2d}}$……Ecuación 35.

$\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_h + \sigma_{3d}}$……Ecuación 36.

Si sumamos los 3 esfuerzos principales obtenemos la ecuación 37.

$$\boldsymbol{3\sigma_h = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - (\sigma_{ld} + \sigma_{2d} + \sigma_{3d})}$$ ……Ecuación 37.

Si ahora se plantea un cambio volumétrico sin distorsión entonces en la ecuación 37 el termino entre paréntesis debe de ser cero, obteniendo así la ecuación 38 correspondiente a la componente volumétrica o hidrostática del esfuerzo σ_h resultado en el promedio de los esfuerzos principales:

$$\boldsymbol{\sigma_h = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}}$$ ……...Ecuación38.

La energía de deformación Uh del cambio de volumen hidrostático se determina sustituyendo cada esfuerzo principal en la ecuación 32 por σ_h obteniendo la ecuación 39.

$$\boldsymbol{U_h = \frac{3}{2}\frac{(1-2v)}{E}\sigma_h^2}$$ ……Ecuación 39.

Sustituyendo la ecuación 38 tenemos la ecuación 40 de energía de distorsión hidrostática.

$$\boldsymbol{U_h = \frac{1-2v}{6E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]}$$ ……Ecuación 40.

De la ecuación 33 obtenemos por despeje la energía de distorsión como se muestra en la ecuación 41 y simplificando llegamos a la ecuación 42.

$$\boldsymbol{U_d = U - U_h}$$ ……Ecuación 41.

$$\boldsymbol{U_d = \frac{1+v}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3]}$$ ……..……Ecuación 42.

2.8.3. Esfuerzo efectivo de Von Mises

El esfuerzo efectivo de Von mises se define como el esfuerzo de tensión uniaxial que crearía la misma energía de distorsión que la combinación real de los esfuerzos aplicados. Este permite manejar casos de esfuerzos combinados multiaxiales de tensión y cortante, como si fuera resultado de una carga de tensión pura.

El esfuerzo efectivo de Von Mises en tres dimensiones entonces lo podemos escribir como la ecuación 43.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \sqrt{\boldsymbol{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}}$$ ……..……Ecuación 43.

Y para el caso bidimensional tenemos la ecuación 44.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \sqrt{\boldsymbol{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}}$$ ……..……Ecuación 44.

3. PROCEDIMIENTO

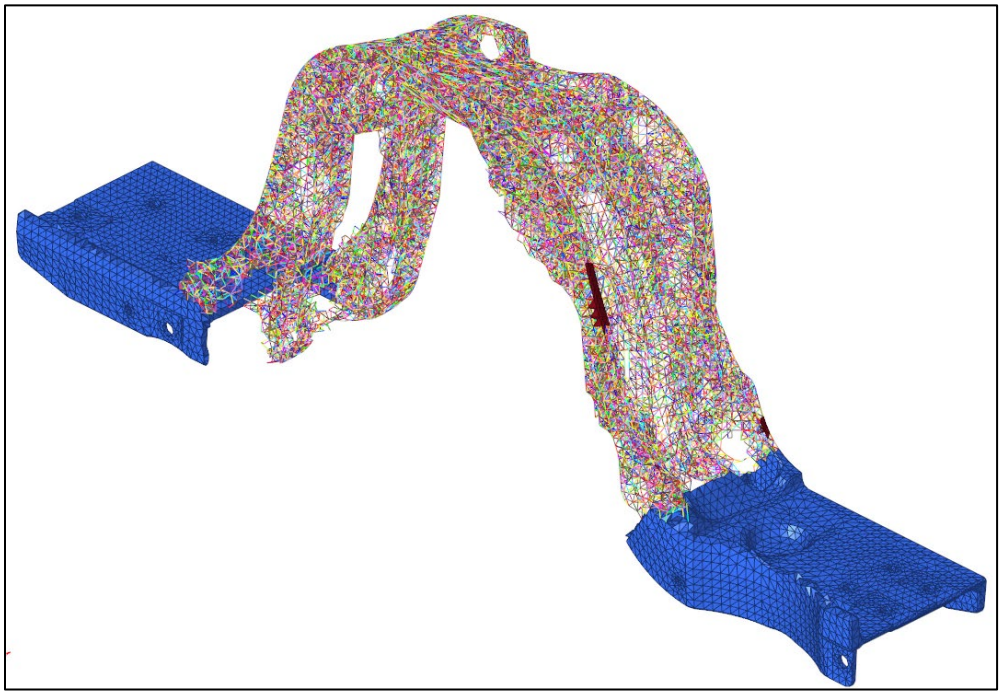
El autor de la tesis decidió retirar este capítulo del documento para el Repositorio Nacional.

4. RESULTADOS

En este capítulo abordaremos el análisis de los resultados obtenidos para nuestras 3 iteraciones de optimización y de acuerdo con el modelo FEM obtenido se determinará qué valor de fracción de volumen genera el resultado con mejor conectividad que en el futuro podría ser más susceptible de generarse mediante algún método de manufactura aditiva como la impresión 3D, este valor será confidencial y sólo disponible en el procedimiento documentado dentro de la empresa OEM.

4.1. RESULTADOS ITERACIÓN 1

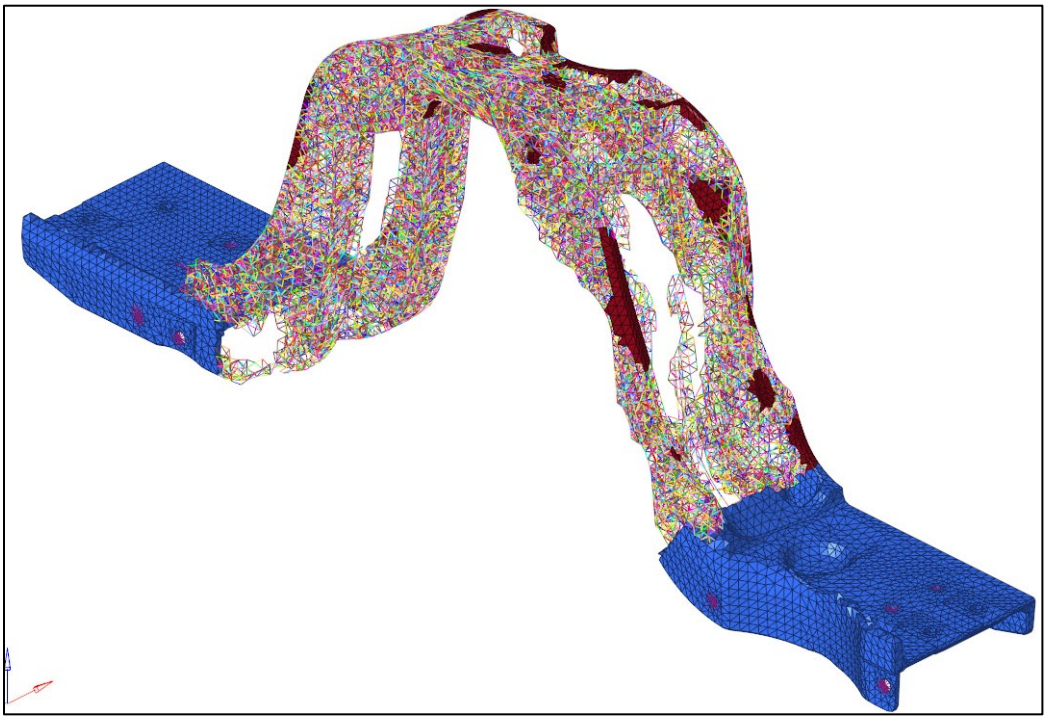
El resultado final obtenido para la iteración número 1 permitió obtener un componente mostrado en la figura 38, pero también encontramos algunas desconexiones importantes a considerar entre los elementos de tipo lattice que podrían provocar una degradación del desempeño en los diferentes casos de carga, esta degradación se estudia en las siguientes secciones.



Elaboración propia

4.2. RESULTADOS ITERACIÓN 2

Como resultado final de la iteración de optimización numero 2 podemos observar una reducción de material aún mayor sin embargo aún encontramos zonas del modelo con problemas de conectividad es decir nuestro modelo tiene partes que parecieran estar en voladizo y también se observan algunas zonas en las que se mantienen partes completamente sólidas del componente, estas partes se aprecian en color rojo por lo tanto esta segunda iteración aún debe de ser mejorada, en la figura 39 se muestra el modelo final de la optimización número 2.



Elaboración propia

4.3. RESULTADOS ITERACIÓN 3

El resultado de la iteración de optimización número 3 mostrado en la figura 40 nos permite observar una mayor densidad de elementos de tipo lattice y algunas zonas de la geometría en las que el algoritmo de optimización ha preferido mantener como elementos sólidos y no intercambiar por elementos lattice, lo anterior trae

consigo un ligero incremento en la masa final del componente al igual que su comportamiento en los diferentes casos de carga. En esta iteración podemos observar que el modelo final ya no presenta desconexiones en su geometría y se percibe una mejor distribución de los elementos a través de todo el espacio de diseño.

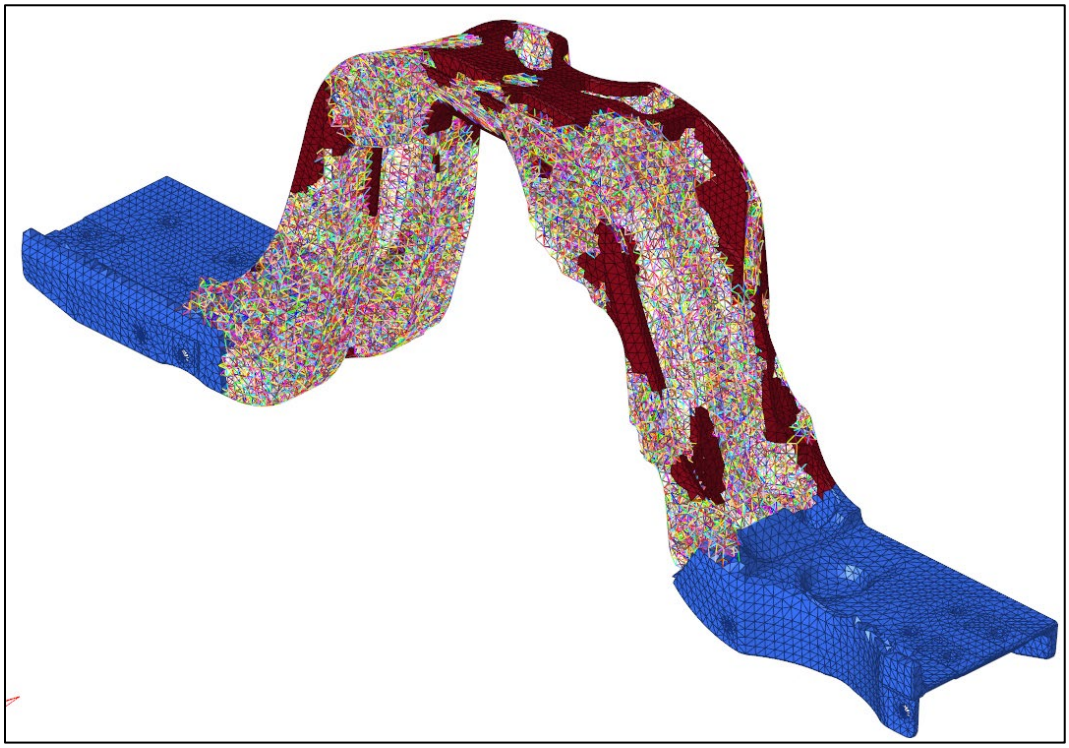


Figura 18. Modelo resultante iteración 3.

Elaboración propia

4.4. RESULTADOS DE OPTIMIZACION Vs MODELO BASE

Recordemos que como restricciones para el desempeño mecánico de nuestro componente tenemos el nivel de esfuerzo de Von Mises que no debería de sobrepasar en ningún caso de carga los 152 MPa y la frecuencia natural correspondiente al modo 12 no debería de encontrarse por debajo de 31 Hz.

En la tabla 1 podemos observar las diferencias en MPa para los casos de carga estáticos lineales (Tor, Tor2 y Flexión) así como para el caso dinámico lineal

correspondiente al análisis modal en Hz para la frecuencia natural del miembro estructural, recordemos que hasta este momento aún no se cuenta con las propiedades específicas para el material a usar en la manufactura aditiva, por lo que el material es el típico ya mencionado anteriormente.

Tabla 1. Tabla comparativa de resultados.

MODELO	CASO DE CARGA Tor [MPa]	CASO DE CARGA Tor2 [MPa]	CASO DE CARGA Flexión [MPa]	CASO DE CARGA Modal [Hz]	MASA FINAL [Kg]
Diseño base	6.54	6.54	2.97	35.98	6.56
Optimización 1	68.12	68.12	68.09	35.64	2.52
Optimización 2	39.70	39.70	21.74	33.13	2.97
Optimización 3	55.55	55.55	12.97	35.65	4.08

Elaboración propia

Podemos resumir que las 3 iteraciones de optimización cumplen con el nivel de esfuerzo y con la frecuencia natural requerida ya que el valor de esfuerzo máximo encontrado es de 68.12 MPa en la iteración 1, esto puede deberse a que de hecho es la iteración con menor peso de las 3 por lo que es lógico que el nivel de esfuerzo se incremente al haber menor superficie para soportar las fuerzas a las que se ve sometido el miembro estructural. Observamos también que en el resultado de los casos de carga "Tor" y "Tor2" referentes a torción del vehículo el valor de esfuerzo es el mismo por lo que también se comprueba la simetría del modelo completo para las tres iteraciones de optimización.

Con relación a la frecuencia modal, observamos que las 3 iteraciones de optimización se encuentran correctamente por encima del objetivo mínimo de 31 Hz siendo la optimización 2 la de menor frecuencia modal con 33.13 Hz.

La masa de las optimizaciones crece desde la optimización 1 hasta la 3 esto es claramente debido a que conforme avanza el número de optimización la conectividad del miembro estructural es mejorada y esto es logrado mediante la adición de una mayor cantidad de elementos tipo lattice permitiendo generar un

componente más continuo a costa una mayor masa que aun así se encuentra significativamente por debajo de la masa del diseño base.

En la tabla 2 observamos las diferencias en porcentaje tanto para los casos de carga como para la masa del miembro estructural respecto del modelo base para las 3 optimizaciones.

De acuerdo con los resultados obtenidos podemos mencionar que la masa que se ahorró en las 3 optimizaciones ya es mayor a la inicialmente propuesta, sin embargo sólo la optimización numero 3 logró la conectividad requerida evitando tener zonas en voladizo y problemas de desconexión entre los elementos tipo lattice cuestión que también es de suma importancia para la realización exitosa de los análisis de verificación y de la futura manufactura del componente que de momento queda fuera del alcance de nuestro estudio. Por lo anterior y en vista de que la optimización 3 cumple con los criterios y restricciones impuestos en este proyecto resulta ser nuestra opción ganadora, por lo que los parámetros mostrados en la figura 43 son los correctos y que para nuestro fin son seleccionados como ganadores del estudio.

Tabla 2. Porcentaje de diferencia.

MODELO	CASO DE CARGA Tor [%]	CASO DE CARGA Tor2 [%]	DIFERENCIA CASO DE CARGA Flexión [%]	CASO DE CARGA Modal [%]	MASA FINAL [%]
Optimización 1	1041.59	1041.59	2292.59	99.05	38.41
Optimización 2	607.03	607.03	731.98	94.71	45.27
Optimización 3	849.38	849.38	436.70	99.08	62.19

Elaboración propia

Como información adicional se adjuntan la siguiente información por anexo:

- Anexo A: Gráficos de esfuerzo para el caso de carga de Torción 1(Tor) y Torción 2 (Tor2)
- Anexo B: Gráficos de esfuerzo para el caso de flexión
- Anexo C: Gráficos de modo de vibración y frecuencia natural

CONCLUSIONES

A través del presente trabajo de tesis se generó la optimización de un miembro estructural de un vehículo sujeto a diferentes restricciones de diseño y sometido a 4 diferentes casos de carga a los que el componente y el vehículo se verán sometidos durante su uso, las conclusiones son las siguientes:

- La optimización número 3 que fue seleccionada como ganadora cuenta con los parámetros necesarios para generar un resultado correctamente conectado en su malla.
- Se encuentra dentro de los valores de esfuerzo y frecuencia requeridos.
- Se cumple con una reducción de masa importante superior a la originalmente planteada del 10% respecto al modelo base, la optimización 3 reduce en 37.81% la masa original del miembro estructural.
- Se documenta como primer antecedente de optimización con lattices dentro del grupo de Análisis CAE del OEM y como primer paso previo a la llegada y puesta en marcha de diferentes técnicas de manufactura aditiva que son grandes candidatas para la creación de componentes con estructuras de tipo lattice.
- Se documentaron los parámetros usados en la optimización numero 3 como parte de un procedimiento generado en el equipo a partir de este proyecto de tesis.
- Como punto final se obtuvo un mejor entendimiento de los requerimientos de análisis que vienen en camino al sector automotriz una vez que las estructuras de tipo lattice incrementen su uso en los diferentes componentes del vehículo y también se tuvo un buen acercamiento al comportamiento mecánico de estas estructuras en los casos de carga planteados en el proyecto.

RECOMENDACIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos y gracias a la experiencia generada a través del proyecto realizado se plantean las siguientes recomendaciones:

1. Tomar el conocimiento generado en el proyecto para llevar a cabo el estudio de otros componentes que puedan presentar condiciones similares al estudiado de manera que el uso y traslado del conocimiento ya adquirido pueda ser de manera más inmediata.
2. Se recomienda generar cursos de entrenamiento a las áreas impactadas por el proyecto con la intención de expandir el conocimiento a más ingenieros y de esta manera crear una sinergia que ayude a la aplicación de este tipo de optimizaciones.
3. No perder de vista que la optimización con lattices también puede ser aplicable a componentes plásticos.
4. Llevar a cabo la caracterización de probetas del material de impresión 3D y realizar una nueva iteración de los modelos de elemento finito y documentar cambios importantes.
5. Realizar el seguimiento del desarrollo del miembro estructural en etapas más avanzadas con la intención de balancear los requerimientos de otras áreas de CAE con los requerimientos de estructura del vehículo que es el área en la que se llevó a cabo este proyecto.

APORTACIÓN DE LA TESIS

La realización de este proyecto permitió identificar los parámetros correctos que nos permiten obtener un modelo continuo sin cortes o partes del componente en voladizo y que cumple con las restricciones de diseño y condiciones de frontera planteadas. Se incluyen los resultados para las iteraciones de optimización resueltas donde podemos observar los cambios geométricos en el modelo final y los cambios en sus niveles de esfuerzo y de frecuencia modal. Éste antecedente es un primer paso para la reducción de masa en el vehículo mediante el uso de la manufactura aditiva que podrá generar los modelos finales producidos por la optimización y que para este caso el porcentaje de ahorro de masa es de 37.81 %.

APORTACIÓN SOCIAL DE LA TESIS

La reducción de masa que trae consigo este tipo de optimizaciones con elementos tipo lattices es muy importante y cada vez tiene un mayor impacto no sólo en la industria automotriz, esta reducción de más acarrea una cadena de beneficios para el planeta y por consiguiente para toda vida que habita en él. En general significa una menor contaminación al requerir menos masa un componente, la energía para extraer la materia prima es menor, para transformarla también, la explotación de recursos baja y la capacidad de reciclar sube. Las estructuras tipo lattice también van a generar vehículos más seguros para los consumidores al adaptar sus resistencias de mejor manera frente a un choque, por ejemplo.

REFERENCIAS

Altair. (2014). *Hyperworks.* Retrieved from www.altairhyperworks.com: www.altairhyperworks.com

Altair Connect. (2016). *Optistruct User´s Guide*. Retrieved from https://connect.altair.com/CP/kb-view.html?f=2&kb=128167

Altair Engineering. (2013). *Altair Hyperworks.* Retrieved from Theory Optimization : What is Optimization, What are the different disciplines of Optimization, What is Design Variable, Response, Dconstraints & Objective: https://altairhyperworks.in/edu/contest/aoc/2013/images/tutorials-videos/18_Theory_optimization.zip

Chen, W., Zheng, X., & Liu, S. (2018). Finite-element-mesh based method for modeling and optimization of lattice structures for additive manufacturing. *Materials, 11*(11), 2073. doi:10.3390/ma11112073

Dakshnamoorthy, V., & Taylor, R. (2016). Automated lattice optimization of hinge fitting with displacement constraint. *Solid Freeform Fabrication Symposium – An Additive Manufacturing Conference*.

Dalpadulo, E., Pini, F., & Leali, F. (2020). Integrated CAD platform approach for Design for Additive Manufacturing of high performance automotive components. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*. doi:10.1007/s12008-020-00684-7

Gibson, L., Ashby, M., & Harley, B. (2010). *Cellular materials in nature and medicine.* Cambridge: Cambridge University Press.

Gratzer, G. (2016). *The congruences of a finite lattice: a "proof-by-picture" approach* (2nd ed.). Toronto: Springer International. doi:10.1007/978-3-319-38798-7

Horvath, J., & Cameron, R. (2020). *Mastering 3D Printing* (2nd ed.). (J. Vakili, Ed.) New York: Springer Science+Bussines Media New York. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4842-5842-2

J, B., & HW, S. (2008). *Aluminum Foam Sandwich Panels: Manufacture, Metallurgy and Applications.* Wiley Online Library. doi:https://doi.org/10.1002/adem.200800091

Kanbur, B., Suping, S., & Duan, F. (2020). Design and optimization of conformal cooling channels for injectionmolding: a review. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 106*(7), 3253-3271. doi:10.1007/s00170-019-04697-9

Madier, D. (2020). *Practical finite element analysis for mechanical engineers.* Quebec: FEA Academy.

Morello, L., Rosti, L. R., Pia, G., & Tonoli, A. (2011). *The automotive body* (Vol. Volume 1: Components design). New York: Springer Nature. doi:10.1007/978-94-007-0513-5

Norberg, E., & Lövgren, S. (2011). *Topology optimization of vehicle body structure for improved ride & handling (Independent thesis Advanced level (degree of Master)*. Universidad de Linköping. Retrieved from http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:liu:diva-71009

Norton, R. (2011). *Diseño de máquinas: un enfoque integrado* (4 ed.). México: Pearson Education.

Park, H.-S., & Dang, X.-P. (2010). Structural optimization based on CAD-CAE integration and metamodeling techniques. *Computer-Aided Design, 42*(10), 889-902. doi:10.1016/j.cad.2010.06.003

Reintjes, C., & Lorenz, U. (2020). Bridging mixed integer linear programming for truss topology optimization and additive manufacturing. *Optimization and Engineering, 22*(2), 849-893. doi:10.1007/s11081-020-09541-8

Rodríguez Galbarro, H. (s.f.). *Tutorial no. 100: características mecánicas del acero*. Retrieved from ingemecanica: https://ingemecanica.com/tutorialsemanal/tutorialn100.html

ANEXOS

El autor de la tesis decidió retirar este capítulo del documento para el Repositorio Nacional.